Capitolul 1

Elemente de topologie în $\mathbb{R}^k$

1.1 Structura de spaţiu vectorial pe $\mathbb{R}^k$

Vom nota cu Π (respectiv Σ) planul (spaţiul cu trei dimensiuni) orientat şi cu
$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$;
$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$
Aplicaţiile

$$\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \Pi, \varphi_2(x, y) = P(x, y) \in \Pi$$

şi

$$\varphi_3 : \mathbb{R}^3 \to \Sigma, \varphi_3(x, y, z) = P(x, y, z) \in \Sigma$$

sînt bijecţii. Vom identifica în mod curent un punct din plan (spaţiu) cu o pereche ordonată (triplet ordonat) din $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$).

$\forall A \subseteq \mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3), \varphi_2(A)(\varphi_3(A))$ se numeşte imaginea plană (în spaţiu) a mulţimii A.

1.1.1 Exemple 1. Fie $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 \leq y^2\}$. Imaginea plană a mulţimii A este porţiunea haşurată din Figura 1 de mai jos.

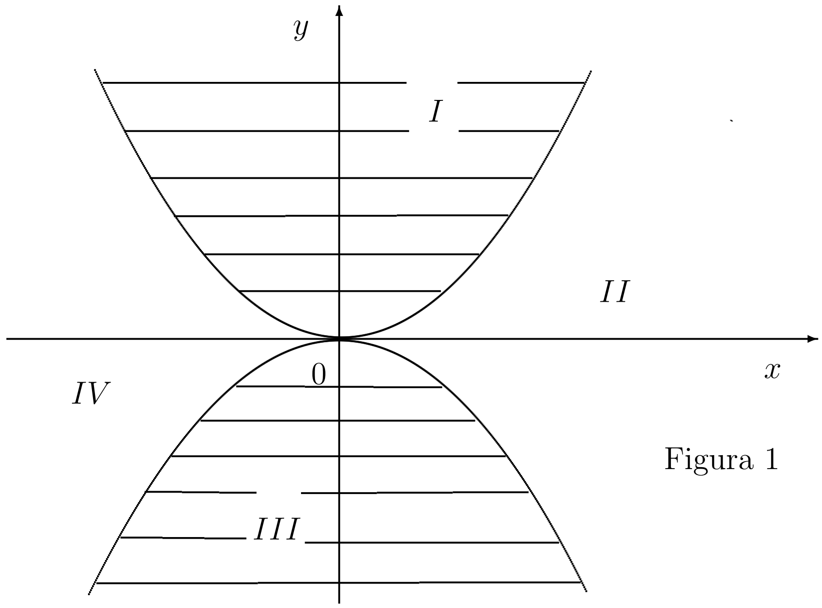


Figura 1

(x,y)	I	II	III	IV
$y-x^2$	+	-	-	
$y+x^2$	+	+	-	+
y^2-x^4	+	-	+	-

$\Longrightarrow\ A = I \cup III$

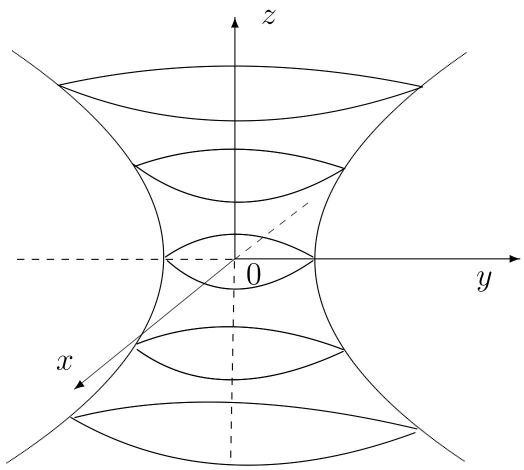


Figura 2

2. Mulţimea $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ are drept imagine un hiperboloid de rotaţie din $\mathbb{R}^3$ a cărui imagine este schiţată în Figura 2 de mai sus.

Distanţa dintre două puncte

Fie $(x, y, z), (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ şi fie d distanţa dintre aceste două puncte (vezi Figura 3); atunci

$$d = \sqrt{d_1^2 + (z - y)^2} = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2}.$$

În cazul particular al planului (deci dacă $z = 0$), se obţine $d = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$ iar pe dreaptă $d = |x - u|$ şi deci se regăsesc formulele cunoscute pentru distanţa dintre două puncte în plan şi pe dreaptă.

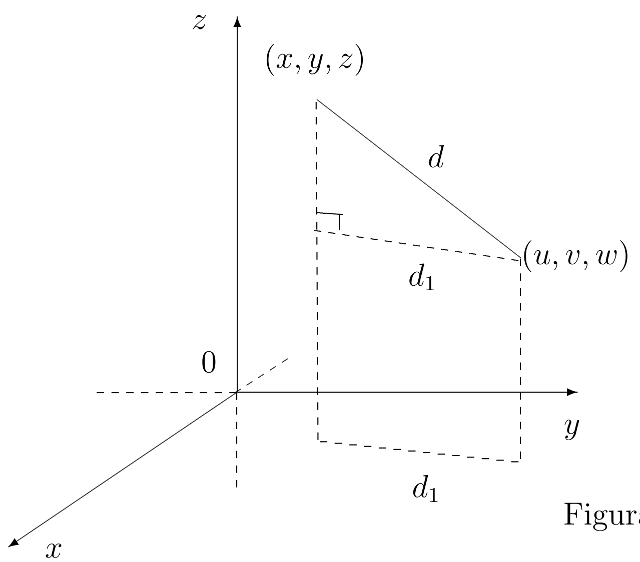


Figura 3

Inspiraţi de aceste cazuri particulare vom introduce o distanţă între două puncte arbitrare din $\mathbb{R}^k$.

1.1.2 Definiţie. *Fie* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_k), \mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_k) \in \mathbb{R}^k$*; definim* **distanţa** *dintre punctele* $\mathbf{x}$ *şi* $\mathbf{y}$ *ca fiind numărul pozitiv*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_k - y_k)^2}.$$

Distanţa dintre punctele spaţiului $\mathbb{R}^k$ are următoarele proprietăţile.

1.1.3 Teoremă.

$$\begin{aligned} 1).\ d(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}=\mathbf{y};\\ 2).\ d(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= d(\mathbf{y},\mathbf{x}), \forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^k;\\ 3).\ d(\mathbf{x},\mathbf{z}) &\le d(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z}), \forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^k. \end{aligned}$$

Demonstraţie. Vom demonstra numai proprietatea 3). Fie $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_k)$, $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_k), \mathbf{z} = (z_1, ..., z_k) \in \mathbb{R}^k$; atunci, utilizînd inegalitatea lui Cauchy-Schwarz-Buniakowski $(\sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \cdot \sum_{i=1}^k \beta_i^2 \ge (\sum_{i=1}^k \alpha_i\beta_i)^2)$ obţinem

$$[d(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z})]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^k (x_i - z_i)^2 + \sum_{i=1}^k (y_i - z_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^k (x_i - z_i)^2 \cdot \sum_{i=1}^k (y_i - z_i)^2} \ge$$

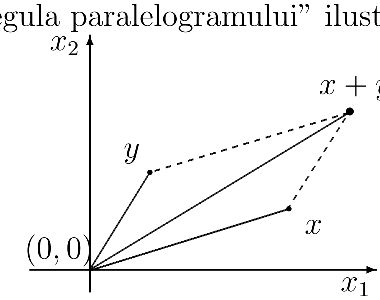
$$\ge \sum_{i=1}^k (x_i - z_i)^2 + \sum_{i=1}^k (y_i - z_i)^2 + 2\cdot \sum_{i=1}^k (x_i - z_i)(y_i - z_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^k (x_i - y_i)^2 = d^2(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

■

1.1.4 Definiţie. *O funcţie d care la orice două puncte x, y ale unei mulţimi X asociază un număr pozitiv $d(x, y)$ şi care verifică proprietăţile 1), 2) şi 3) din teorema precedentă se numeşte* **metrică** *pe X. Metrica definită în 1.1.2 se numeşte* **metrica euclidiană** *pe $\mathbb{R}^k$.*

În $\mathbb{R}^2$ adunarea a două puncte $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ şi $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ se face după "regula paralelogramului" ilustrată mai jos:



Suma este $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$; vom defini după acelaşi model adunarea în $\mathbb{R}^k$.

1.1.5 Definiţie. *Fie* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_k), \mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_k) \in \mathbb{R}^k$ *şi* $t \in \mathbb{R}$*; definim adunarea prin* $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, ..., x_k + y_k)$ *şi înmulţirea cu scalari prin* $t \cdot \mathbf{x} = (tx_1, ..., tx_k)$.

Faţă de aceste două operaţii $\mathbb{R}^k$ se organizează ca un spaţiu vectorial real, adică sînt verificate proprietăţile:

1. $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^k$ (asociativitatea adunării).

2. $\exists\ \mathbf{0} = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^k$ a.î. $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ ($\mathbf{0}$ se numeşte element neutru la adunare;

3. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k, \exists(-\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^k$ a.î. $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = 0$ ($-\mathbf{x}$ se numeşte opusul elementului $\mathbf{x}$).

4. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ (comutativitatea adunării).

Din proprietăţile 1. − 4. deducem că $(\mathbb{R}^k, +)$ este un grup comutativ.

5. $t \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = t \cdot \mathbf{x} + t \cdot \mathbf{y}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k, \forall t \in \mathbb{R}$.

6. $(t + s) \cdot \mathbf{x} = t \cdot \mathbf{x} + s \cdot \mathbf{x}, \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$.

7. $(t \cdot s) \cdot \mathbf{x} = t \cdot (s \cdot \mathbf{x}), \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$.

8. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$.

1.1.6 Definiţie. $\forall\ A \subseteq \mathbb{R}^k, \forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k, \forall\ t \in \mathbb{R}$ *definim*

$\mathbf{x} + A = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{y} \in A\}$ *(translata mulţimii* A *cu vectorul* $\mathbf{x}$*) şi*

$t \cdot A = \{t \cdot \mathbf{x} : \mathbf{x} \in A\}$.

1.1.7 Definiţie. *Fie* $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$*; numărul pozitiv*

$$\|\mathbf{x}\| = d(\mathbf{x}, 0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}$$

se numeşte **norma** *elementului* $\mathbf{x}$.

1.1.8 Propoziţie. *Aplicaţia* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+$ *este o normă pe* $\mathbb{R}^k$ *adică verifică condiţiile:*

1. $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$.

2. $\|t \cdot \mathbf{x}\| = |t| \cdot \|\mathbf{x}\|, \forall t \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$.

3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$.

1.1.9 Observaţii. (i) Rezultă din propoziţia precedentă că $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$ este un spaţiu normat real.

(ii) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$.

Inegalitatea de la punctul 3) al teoremei 1.1.3 (inegalitatea triunghiului) devine, în anumite cazuri, egalitate; prezentăm în definţia următoare această situaţie specială.

1.1.10 Definiţie. *Fie* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$*(sau* $\mathbb{R}^2$*); spunem că* $\mathbf{z}$ *este* **între** $\mathbf{x}$ *şi* $\mathbf{y}$ *şi notăm cu* $\mathbf{x} - \mathbf{z} - \mathbf{y}$ *situaţia în care* $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.
Mulţimea $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} - \mathbf{z} - \mathbf{y}\}$ *se va numi* **segment** *cu capete* $\mathbf{x}$ *şi* $\mathbf{y}$.
Mulţimea $[\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x}-\mathbf{z}-\mathbf{y}$ *sau* $\mathbf{x}-\mathbf{y}-\mathbf{z}\}$ *se va numi* **semidreaptă** *cu originea în* $\mathbf{x}$ *şi care trece prin* $\mathbf{y}$.
Mulţimea $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cup [\mathbf{y}, \mathbf{x})$ *se va numi* **dreaptă** *care trece prin punctele* $\mathbf{x}$ *şi* $\mathbf{y}$.
Definiţii similare se pot da pentru segmente, semidrepte sau drepte din $\mathbb{R}^2$.

În propoziţia următoare se dau caracterizări ale segmentelor, semidreptelor şi dreptelor din $\mathbb{R}^3$.

1.1.11 Propoziţie. *Fie* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$*; atunci:*
1. $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} : t \in [0,1]\}$.
2. $[\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} : t \geq 0\}$.
3. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} : t \in \mathbb{R}\} = \{\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}) : t \in \mathbb{R}\}$.

Demonstraţie.
1. Fie $t \in [0,1]$ şi $\mathbf{z} = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$; atunci $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| = \|t(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = t\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ şi $d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| = (1-t)\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ de unde rezultă: $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ şi deci $\mathbf{z} \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$.

Reciproc, $\forall\, \mathbf{z} \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}], d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$; fie $t = \dfrac{d(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \in [0,1]$.

Urmărind ca suport imaginea din Figura 4, obţinem:

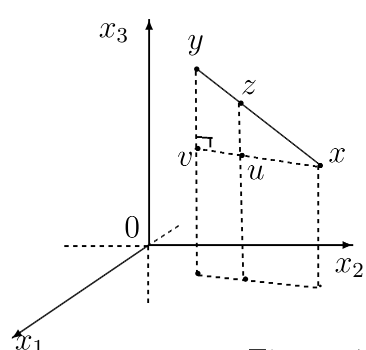


Figura 4

$\dfrac{z_3 - x_3}{y_3 - x_3} = \dfrac{d(\mathbf{x},\mathbf{z})}{d(\mathbf{x},\mathbf{y})} = t$ de unde $z_3 = x_3 + ty_3 - tx_3 = (1-t)x_3 + ty_3$.
Similar, $z_2 = (1-t)x_2 + ty_2$ şi $z_1 = (1-t)x_1 + ty_1$, deci $\mathbf{z} = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$.

2. $\mathbf{z} \in [\mathbf{x},\mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{z} \in [\mathbf{x},\mathbf{y}]$ sau $\mathbf{y} \in [\mathbf{x},\mathbf{z}] \Leftrightarrow \exists\, t \in [0,1]$ a.î. $\mathbf{z} = (1-t)\mathbf{x}+t\mathbf{y}$ sau $\exists\, s \in [0,1]$ a.î. $\mathbf{y} = (1-s)\mathbf{x} + s\mathbf{z}$. Ultima egalitate se mai scrie $\mathbf{z} = (1-\frac{1}{s})\mathbf{x} + \frac{1}{s}\mathbf{y}$ iar $t = \frac{1}{s} \geq 1$. Rezultă că $\mathbf{z} \in [\mathbf{x},\mathbf{y}) \Leftrightarrow \exists\, t \geq 0$ a.î. $\mathbf{z} = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$.

3. $\mathbf{z} \in (\mathbf{x},\mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{z} \in [\mathbf{x},\mathbf{y}) \cup [\mathbf{y},\mathbf{x}) \Leftrightarrow \exists\, t \geq 0$ a.î. $\mathbf{z} = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$ sau $\exists\, s \geq 0$ a.î. $\mathbf{z} = (1-s)\mathbf{y} + s\mathbf{x}$; ultima egalitate se scrie $\mathbf{z} = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$ unde $t = 1-s \leq 1$. ■

Exerciţiu. Să se arate că $\mathbf{x} + [\mathbf{y},\mathbf{z}] = [\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{z}] = \mathbf{x} + [\mathbf{z},\mathbf{y}]$.

Vectori

Fie $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$; segmentul orientat $\overrightarrow{\mathbf{xy}}$ este segmentul $[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ căruia i s-a asociat o direcţie: de la originea $\mathbf{x}$ la extremitatea $\mathbf{y}$. Observăm că $[\mathbf{x},\mathbf{y}] = [\mathbf{y},\mathbf{x}]$ însă $\overrightarrow{\mathbf{xy}} \neq \overrightarrow{\mathbf{yx}}$.

Spunem că $\overrightarrow{\mathbf{xy}}$ este echivalent cu $\overrightarrow{\mathbf{uv}}$ dacă există $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^k$ a.î. $\mathbf{z} + \mathbf{x} = \mathbf{u}$ şi $\mathbf{z} + \mathbf{y} = \mathbf{v}$ şi notăm aceasta cu $\overrightarrow{\mathbf{xy}} \sim \overrightarrow{\mathbf{uv}}$; observăm că $\overrightarrow{\mathbf{xy}} \sim \overrightarrow{\mathbf{0y-x}}$.

$\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea segmentelor orientate (este reflexivă, simetrică şi tranzitivă). O clasă de echivalenţă în raport cu relaţia $\sim$ se numeşte **vector**.

Aşa cum am remarcat, vectorul generat de orice segment orientat $\overrightarrow{\mathbf{xy}}$ este de asemenea generat de segmentul orientat $\overrightarrow{\mathbf{0y-x}}$ care are originea în $\mathbf{0}$. Astfel putem identifica orice element $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ cu vectorul $\{\mathbf{z} + \overrightarrow{\mathbf{0x}} : \mathbf{z} \in \mathbb{R}^k\} = \{\overrightarrow{\mathbf{zz+x}} : \mathbf{z} \in \mathbb{R}^k\}$. Acesta este un motiv în plus să numim elementele lui $\mathbb{R}^k$ vectori.

Convenţie. În cele ce urmează vom nota vectorii $\mathbf{x}$ din $\mathbb{R}^k$ pur şi simplu cu x, urmînd să se înţeleagă din context cînd este vorba de vectorul $x \in \mathbb{R}^k$ şi cînd de numărul real x; în mod similar vectorul nul $\mathbf{0}$ va fi notat cu 0.

Un **versor** este un vector $x \in \mathbb{R}^k$ cu $\|x\| = 1$.

În cazul $n = 3$ versorii $\mathbf{i} = (1,0,0), \mathbf{j} = (0,1,0), \mathbf{k} = (0,0,1)$ formează o bază în $\mathbb{R}^3$. Orice alt vector $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ se exprimă în mod unic în funcţie de aceşti versori: $x = x_1 \cdot \mathbf{i} + x_2 \cdot \mathbf{j} + x_3 \cdot \mathbf{k}$.

În $\mathbb{R}^k$ versorii $e_1 = (1,0,0,...,0,0), e_2 = (0,1,0,...,0,0), ...,$
$e_k = (0,0,0,...,0,1)$ formează o bază; orice vector $x = (x_1,...,x_k) \in \mathbb{R}^k$ se scrie în mod unic în funcţie de versorii bazei: $x = x_1 \cdot e_1 + ... + x_k \cdot e_k$.

Ecuaţia dreptei şi ecuaţia planului

Inspiraţi de propoziţia 1.1.11, extindem în $\mathbb{R}^k$ noţiunile de segment, semidreaptă şi dreaptă.

1.1.12 Definiţie. *Fie* $x^0 = (x_1^0, ..., x_k^0), y^0 = (y_1^0, ..., y_k^0) \in \mathbb{R}^k$*; numim:*
1. **segment** *avînd drept capete punctele* x^0 *şi* y^0 *mulţimea*
$[x^0, y^0] = \{x^0 + t(y^0 - x^0) : t \in [0, 1]\}$.
2. **semidreaptă** *cu originea în punctul* x^0 *şi care trece prin* y^0 *mulţimea*
$[x^0, y^0) = \{x^0 + t(y^0 - x^0) : t \geq 0\}$.
3. **dreaptă** *care trece prin punctele* x^0 *şi* y^0 *mulţimea*
$(x^0, y^0) = \{x^0 + t(y^0 - x^0) : t \in \mathbb{R}\}$.
Ecuaţia $\boxed{x = x^0 + t(y^0 - x^0), t \in \mathbb{R}}$ *se numeşte ecuaţia vectorială a dreptei* (x^0, y^0)*; ecuaţiile scalare sau parametrice ale acestei drepte sînt:*

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + t(y_1^0 - x_1^0) \\ x_2 = x_2^0 + t(y_2^0 - x_2^0) \\ .... \\ x_k = x_k^0 + t(y_k^0 - x_k^0) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Dacă se elimină parametru t, ecuaţia dreptei se mai poate scrie:
$\dfrac{x_1 - x_1^0}{y_1^1 - y_1^0} = \dfrac{x_2 - x_2^0}{y_2^1 - y_2^0} = ... = \dfrac{x_k - x_k^0}{y_k^1 - y_k^0}$. Se constată imediat că, în cazul particular $n = 2$, se obţine ecuaţia plană a dreptei ce trece prin două puncte, ecuaţie cunoscută din geometria analitică plană.
Din cele de mai sus rezultă că ecuaţia unei drepte care trece prin x^0 şi este paralelă cu versorul u^0 (dreaptă ce trece deci prin x^0 şi prin $x^0 + u^0$) va fi

$$\boxed{x = x^0 + tu^0, t \in \mathbb{R}}$$

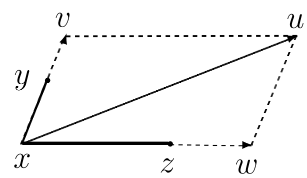
În cazul particular $n = 3$ vom nota cu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ unghiurile făcute de versorul u^0 cu axele Ox_1, Ox_2 şi respectiv Ox_3; atunci $u^0 = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$ şi astfel obţinem ecuaţia normala a dreptei:

$$\frac{x_1 - x_1^0}{\cos\alpha_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{\cos\alpha_2} = \frac{x_3 - x_3^0}{\cos\alpha_3}.$$

1.1.13 Propoziţie. *Fie* $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ *puncte necoliniare şi* (x, y, z) *planul care trece prin cele trei puncte; atunci:*

$$(x, y, z) = \{tx + sy + rz : t, s, r \in \mathbb{R}, t + s + r = 1\}.$$

Demonstraţie.



Din figura de mai sus observăm că $u \in (x, y, z) \iff \exists\, v \in (x, y), \exists\, w \in (x, z)$ a.î. $\overrightarrow{xu} = \overrightarrow{xv} + \overrightarrow{xw}$ sau $u - x = v - x + w - x \Leftrightarrow u = v + w - x$. Fie $t, s \in \mathbb{R}$ a.î. $v = x + t(y - x), w = x + s(z - x)$. Atunci $u = ty - tx + x + sz - sx = (1 - t - s)x + tx + sz$.
■

1.1.14 Definiţie. *Fie $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ trei puncte necoliniare; numim* **plan** *care trece prin x, y, z mulţimea $\Pi = \{u = tx + sy + (1 - s - t)z : s, t \in \mathbb{R}\}$. Ecuaţia acestui plan este* $\boxed{u = tx + sy + (1 - t - s)z, \quad t, s \in \mathbb{R}}$.

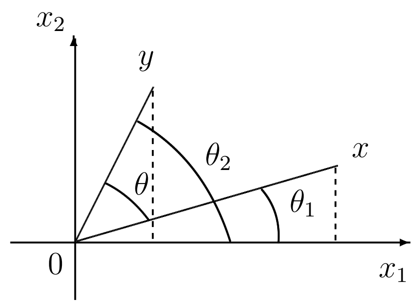
1.1.15 Exemplu.
Fie punctele necoliniare $A = (a, 0, 0), B = (0, b, 0), C = (0, 0, c) \in \mathbb{R}^3$; ecuaţia planului care trece prin A, B şi C este $u = tA + sB + (1 - t - s)C = (ta, 0, 0) + (0, sb, 0) + (0, 0, (1 - t - s)c) = (ta, sb, (1 - t - s)c)$. Dacă notăm cu (x, y, z) coordonatele lui u obţinem $\begin{cases} x = ta \\ y = sb \\ z = (1 - t - s)c \end{cases}$, $t, s \in \mathbb{R}$. Eliminînd parametrii t şi s din ecuaţiile de mai sus vom ajunge la ecuaţia planului prin tăieturi:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

Produs scalar

Fie $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ şi fie θ unghiul $\widehat{x0y}$; definim atunci $(x, y) = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\theta$. Observăm că dreapta care trece prin punctele 0 şi x este perpendiculară pe dreapta ce trece prin 0 şi y dacă şi numai dacă $(x, y) = 0$.

Aşa cum putem constata din figura de mai jos, $\cos\theta = \cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos\theta_2 \cos\theta_1 + \sin\theta_2 \sin\theta_1 = \dfrac{y_1}{\|y\|} \cdot \dfrac{x_1}{\|x\|} + \dfrac{y_2}{\|y\|} \cdot \dfrac{x_1}{\|x\|} = \dfrac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\|x\| \cdot \|y\|}$.



Rezultă deci că $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$; acesta ne permite să extindem acest "produs" la $\mathbb{R}^k$.

1.1.16 Definiţie. *Fie* $x = (x_1, ..., x_k), y = (y_1, ..., y_k) \in \mathbb{R}^k$*; numim* **produs scalar** *(sau* **produs interior***) al vectorilor* x *şi* y *numărul real:*

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i.$$

Vom spune că vectorii x *şi* y *sînt* **perpendiculari** *dacă* $(x, y) = 0$*; vom nota această situaţie cu* $x \perp y$*.*

1.1.17 Observaţie. Deşi notaţia pentru produsul scalar a vectorilor x şi y coincide cu aceea pentru dreapta care trece prin punctele x şi y vom putea să distingem din context în ce sens este folosită.

1.1.18 Propoziţie. *Produsul scalar pe* $\mathbb{R}^k$ *are următoarele proprietăţi:*

$$\begin{aligned}
(x, y) &= (y, x), \forall\ x, y \in \mathbb{R}^k, \\
(tx, y) &= t(x, y), \forall\ x, y \in \mathbb{R}^k, \forall t \in \mathbb{R}, \\
(x + y, z) &= (x, z) + (y, z), \forall\ x, y, z \in R^k, \\
(x, x) &= \|x\|^2, \forall\ x \in \mathbb{R}^k, \\
|(x, y)| &\leq \|x\| \cdot \|y\| \leq \tfrac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2), \forall\ x, y \in \mathbb{R}^k
\end{aligned}$$

Demonstraţie. Vom demonstra numai ultima inegalitate.

$\forall\ x, y \in \mathbb{R}^k, (x - ty, x - ty) \geq 0$ sau $(y, y) \cdot t^2 - 2(x, y) \cdot t + (x, x) \geq 0, \forall\ t \in \mathbb{R}$; deci discriminantul acestui trinom de gradul doi trebuie să fie negativ, de unde: $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. ■

Capitolul 1

Elemente de topologie în $\mathbb{R}^k$

1.1 Structura de spaţiu vectorial pe $\mathbb{R}^k$

1.1.19 Definiţie. *Din propoziţia precedentă remarcăm că*

$$-1 \leq \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1, \forall\ x, y \in \mathbb{R}^k, x \neq 0 \neq y.$$

Rezultă atunci că există un unghi unic $\theta \in [0, \pi]$ *a.î.*

$$\cos\theta = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Vom spune că θ *este* **unghiul** *dintre vectorii* x *şi* y *(unghiul* $\widehat{x0y}$*); regăsim astfel formula din cazul* $k = 2$*:*

$$(x, y) = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\theta, \forall\ x, y \in \mathbb{R}^k.$$

1.2 Relaţia de ordine pe $\mathbb{R}^k$

1.2.1 Definiţie. *Fie* $x = (x_1, ..., x_k), y = (y_1, ..., y_k) \in \mathbb{R}^k$*; spunem că* x *este mai mic decît* y *şi notăm cu* $x \leq y$ *situaţia în care* $x_1 \leq y_1, ..., x_k \leq y_k$.

1.2.2 Observaţie. Relaţia definită este **reflexivă**, adică:
1. $x \leq x, \forall x \in \mathbb{R}^k$,
antisimetrică, deci:

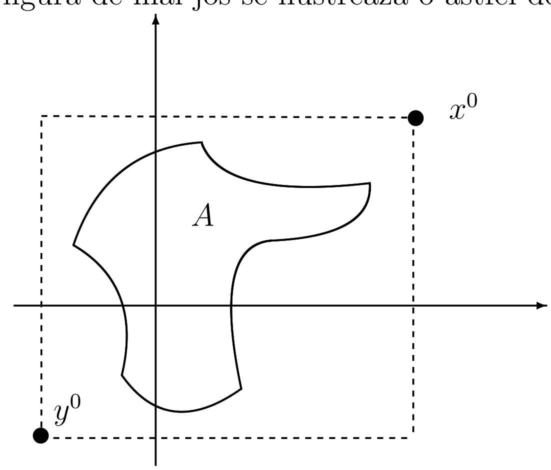
2. $x \leq y$ şi $y \leq x$ antrenează $x = y$
şi **tranzitivă**, deci:
3. $x \leq y$ şi $y \leq z$ antrenează $x \leq z$.
Aceste proprietăţi caracterizează relaţile de ordine; deci "$\leq$" este o **relaţie de ordine** pe $\mathbb{R}^k$. Acestă ordine nu este totală; de exemplu $(0, 1)$ nu este comparabil cu $(1, 0)$ în $\mathbb{R}^2$.

1.2.3 Definiţie. *O mulţime* $A \subseteq \mathbb{R}^k$ *este* **mărginită superior** *în* $\mathbb{R}^k$ *dacă există un* **majorant** *pentru* A*, deci dacă există un element* $x^0 \in \mathbb{R}^k$ *a.î.* $x \leq x^0, \forall\, x \in A$.

O mulţime $A \subseteq \mathbb{R}^k$ *este* **mărginită inferior** *în* $\mathbb{R}^k$ *dacă există un* **minorant** *pentru* A*, deci dacă există un element* $x^0 \in \mathbb{R}^k$ *a.î.* $x \geq x^0, \forall\, x \in A$.

O mulţime este **mărginită** *dacă este mărginită superior şi mărginită inferior.*

În figura de mai jos se ilustrează o astfel de situaţie în $\mathbb{R}^2$



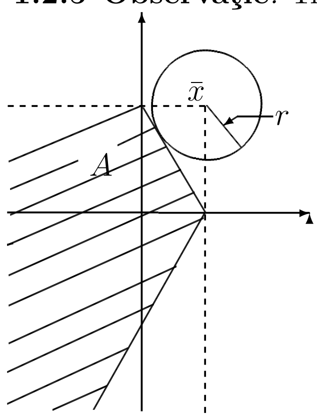
x^0 este un majorant iar y^0 un minorant pentru mulţimea A.

1.2.4 Teoremă. *Orice mulţime nevidă şi mărginită superior (mărginită inferior) din* $\mathbb{R}^k$ *admite margine superioară (margine inferioară).*

Demonstraţie. Presupunem că $x^0 = (x_1^0, ..., x_k^0) \in \mathbb{R}^k$ este un majorant pentru mulţimea nevidă A. Fie $A_1 = \{a \in \mathbb{R} : \exists\, x = (a, x_2, ..., x_k) \in A\}$; A_1 este o mulţime nevidă şi mărginită superior de x_1^0 în $\mathbb{R}$. Rezultă că există $\bar{x}_1 = \sup A_1 \in \mathbb{R}$. Raţionăm similar pentru celelalte coordonate şi găsim $\bar{x}_2, ..., \bar{x}_k$

margini superioare pentru $A_2, ..., A_k$, respectiv. Fie $\bar{x} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k) \in \mathbb{R}^k$. Rezultă imediat că $\bar{x}$ este marginea superioară a mulţimii A. Similar se arată că dacă A este mărginită inferior $\exists\ \bar{y} = \inf A$. ■

1.2.5 Observaţie. Trebuie remarcat că, spre deosebire de $\mathbb{R}$, în $\mathbb{R}^k, k \geq 2$,



nu ne putem apropia oricît de marginea superioară a unei mulţimi cu puncte din mulţime.

În figura alăturată ilustrăm o astfel de situaţie. $\bar{x} = \sup A$ însă, $\forall\ x \in A, d(x, \bar{x}) = \|x - \bar{x}\| \geq r$.

1.2.6 Definiţie. *Fie $x^0 \in \mathbb{R}^k$ şi $r \in \mathbb{R}, r > 0$; mulţimea*

$$S(x^0, r) = \{x \in \mathbb{R}^k : d(x, x^0) = \|x - x^0\| < r\}$$

se numeşte **sferă deschisă** *cu centrul în x^0 şi de rază r iar mulţimea*

$$T(x^0, r) = \{x \in \mathbb{R}^k : d(x, x^0) = \|x - x^0\| \leq r\}$$

se numeşte **sferă închisă** *cu centrul în x^0 şi de rază r.*

1.2.7 Observaţie. În cazul particular $k = 3$ sferele deschise sînt exact sferele geometrice pline fără “coajă”, iar sferele închise sînt sferele pline din spaţiu.

Pentru $k = 2$, sferele deschise (închise) sînt discurile geometrice deschise (închise); în cazul $k = 1$ sferele deschise sînt intervale deschise iar sferele închise sînt intervale închise (centrul este în mijlocul intervalului iar raza este egală cu jumătate din lungimea acestuia).

1.2.8 Propoziţie. *O mulţime $A \subseteq \mathbb{R}^k$ este mărginită dacă şi numai dacă există un număr $r > 0$ a.î. $A \subseteq T(0, r)$ (sau $\|x\| \leq r, \forall\ x \in A$).*

Demonstraţie. ($\Longrightarrow$): Presupunem că A este mărginită; fie $y^0 = (y_1^0, ..., y_k^0)$ un minorant şi $x^0 = (x_1^0, ..., x_k^0)$ un majorant pentru A.

Rezultă că, $\forall\ x = (x_1, ..., x_k) \in A$,

$$y_i^0 \leq x_i \leq x_i^0, \forall\ i = 1, ..., k$$

şi deci că

$$|x_i| \leq \max\{|x_i^0|, |y_i^0|\} \leq \max\{|x_i^0|, |y_i^0|, i = 1, ..., k\}.$$

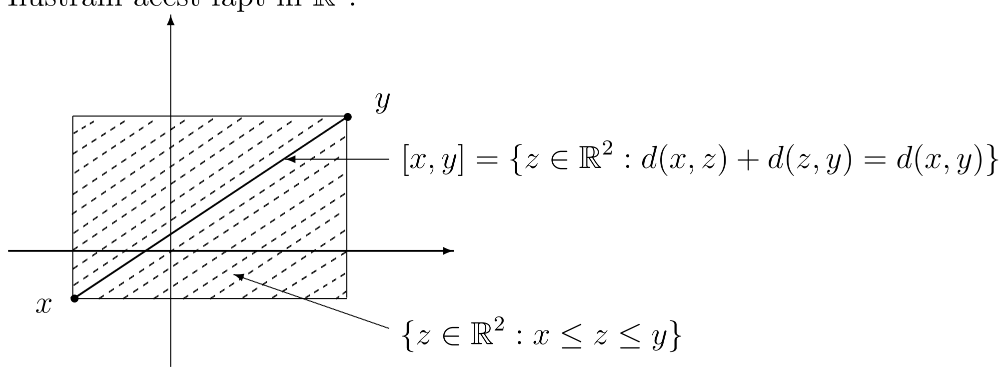
Atunci $\sum_{i=1}^k x_i^2 \leq k \cdot \max\{(x_i^0)^2, (y_i^0)^2 : i = 1, ..., k\}$, de unde

$$\|x\| \leq \sqrt{k} \cdot \max\{|x_i^0|, |y_i^0| : i = 1, ..., k\}.$$

Putem deci alege $r = \sqrt{k} \cdot \max\{|x_i^0|, |y_i^0| : i = 1, ..., k\}$.

($\Longleftarrow$): Presupunem că există un număr $r > 0$ a.î. $A \subseteq T(0, r)$ şi notăm $x^0 = (r, ..., r), y^0 = (-r, ..., -r)$. Este evident că y^0 este un minorant iar x^0 este un majorant pentru mulţimea A. ■

1.2.9 Observaţie. Fie $x, y \in \mathbb{R}^k, x \leq y$; atunci $[x, y] \subsetneq \{z : x \leq z \leq y\}$. Ilustrăm acest fapt în $\mathbb{R}^2$:

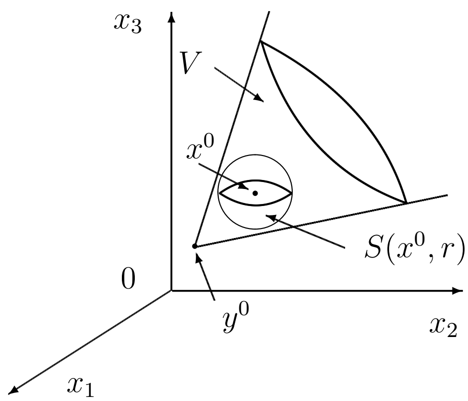


1.3 Structura topologică uzuală pe $\mathbb{R}^k$

1.3.1 Definiţie. *Fie $x^0 \in \mathbb{R}^k$; o mulţime $V \subseteq \mathbb{R}^k$ se numeşte* **vecinătate** *a punctului x^0 dacă există un număr $r > 0$ a.î. $S(x^0, r) \subseteq V$.*

Vom nota cu $\mathcal{V}(x^0)$ mulţimea tuturor vecinătăţilor lui x^0; $\mathcal{V}(x^0)$ este o submulţime a mulţimii $\mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$ a tuturor părţilor lui $\mathbb{R}^k$. Evident că $\forall\ x \in \mathbb{R}^k, \forall\ r > 0, S(x, r) \in \mathcal{V}(x)$.

În figura de mai jos $V \subseteq \mathbb{R}^3$ este un con plin cu vîrful în y^0 iar x^0 este un punct în interiorul lui V; după cum se poate constata din figură, V este vecinătate pentru x^0 dar nu este vecinătate pentru y^0.



Teorema următoare pune în evidenţă cîteva proprietăţi importante ale mulţimii vecinătăţilor unui punct.

1.3.2 Teoremă. *Fie $x^0 \in \mathbb{R}^k$; $\forall\ x \in \mathbb{R}^k$ fie $\mathcal{V}(x)$ mulţimea vecinătăţilor lui x. Atunci sînt îndeplinite următoarele proprietăţi:*

(V_1) $V \in \mathcal{V}(x^0), V \subseteq W \Longrightarrow W \in \mathcal{V}(x^0)$,
(V_2) $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x^0) \Longrightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x^0)$,
(V_3) $x^0 \in V, \forall\ V \in \mathcal{V}(x^0)$,
(V_4) $\forall\ V \in \mathcal{V}(x^0), \exists\ W \in \mathcal{V}(x^0)$ *a.î.* $V \in \mathcal{V}(x), \forall\ x \in W$,
(V_5) $\forall\ y^0 \neq x^0, \exists\ V \in \mathcal{V}(x^0), \exists\ W \in \mathcal{V}(y^0)$ *a.î.* $V \cap W = \emptyset$.

Demonstraţie. Vom schiţa demonstraţia doar pentru ultimele două proprietăţi.

(V_4). Oricare ar fi $V \in \mathcal{V}(x^0)$ există $r > 0$ aşa fel încît $S(x^0, r) \subseteq V$; atunci $W = S(x^0, r) \in \mathcal{V}(x^0)$ şi $\forall\ x \in W, d(x, x^0) = \|x - x^0\| < r$. Fie $r_1 = r - \|x - x^0\| > 0; \forall\ y \in S(x, r_1), d(y, x^0) = \|y - x^0\| \leq \|y - x\| + \|x - x^0\| < r_1 + \|x - x^0\| = r$ deci $y \in S(x^0, r)$. Rezultă că $S(x, r_1) \subseteq S(x^0, r) \subseteq V$ ceea ce antrenează $V \in \mathcal{V}(x)$.

(V_5). Fie $y^0 \neq x^0$; atunci $r = \dfrac{1}{2} \cdot d(x^0, y^0) = \dfrac{1}{2} \cdot \|x^0 - y^0\| > 0$. $S(x^0, r) \in \mathcal{V}(x^0)$, $S(y^0, r) \in \mathcal{V}(y^0)$ şi intersecţia celor două vecinătăţi este vidă.

Intr-adevăr dacă ar exista un element comun x atunci $2 \cdot r = d(x^0, y^0) \leq d(x^0, x) + d(x, y^0) < r + r = 2 \cdot r$ ceea ce este absurd. ∎

În practică este mai dificil de operat cu noţiunea generală de vecinătate; unele vecinătăţi, cum ar fi de exemplu sferele, oferă simplificări ale raţionamentelor.

1.3.3 Definiţie. *Fie $x^0 \in \mathbb{R}^k$; o familie de mulţimi $\mathcal{V}_0(x^0) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$ se numeşte sistem fundamental de vecinătăţi dacă:*

1). $\mathcal{V}_0(x^0) \subseteq \mathcal{V}(x^0)$;

2). $\forall\, V \in \mathcal{V}(x^0), \exists\, W \in \mathcal{V}_0(x^0)$ a.î. $W \subseteq V$.

1.3.4 Exemple. Următoarele familii de mulţimi oferă exemple de sisteme fundamentale numărabile de vecinătăţi pentru un punct $x = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$:

a). $\left\{ S\left(x, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

b). $\left\{ \prod_{i=1}^{k} \left(x_i - \frac{1}{n}, x_i + \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Avînd la dispoziţie noţiunea de vecinătate putem trece la studiul convergenţei şirurilor în $\mathbb{R}^k$.

1.3.5 Definiţie. *O funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$ se numeşte* **şir** *de vectori în $\mathbb{R}^k$; vom nota, $\forall\, n \in \mathbb{N}, f(n) = x^n = (x_1^n, ..., x_k^n)$. Şirurile de numere reale $(x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, ..., (x_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ se vor numi şirurile de coordonate asociate şirului $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Ca şi în cazul real, vom folosi pentru şirul f notaţia mai sugestivă $f \equiv (x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau pur şi simplu (x^n). Pentru a indica mulţimea $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ca mulţime de valori pentru şirul f vom nota (abuziv !) $(x^n) \subseteq A$.

Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$ un şir; şirul $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$ se numeşte **subşir** *al şirului f dacă există o funcţie strict crescătoare $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a.î. $g = f \circ \varphi$. Dacă notăm $\varphi(n) = l_n, \forall n \in \mathbb{N}$ atunci un subşir al şirului f este $g \equiv (x^{l_n})_{n\in\mathbb{N}}$ unde $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir strict crescător de numere naturale.*

1.3.6 Lemă. *Pentru orice mulţime infinită de numere naturale $N \subseteq \mathbb{N}$ există o unică bijecţie strict crescătoare $\varphi : \mathbb{N} \to N$.*

Demonstraţie. Fie $N \subseteq \mathbb{N}$ o mulţime infinită de numere naturale; deoarece N este nevidă şi relaţia de ordine pe $\mathbb{N}$ este o relaţie de bună ordonare, există un cel mai mic element l_0 al mulţimii N; mulţimea infinită $N \setminus \{l_0\}$ este nevidă şi deci are un prim element l_1. Evident $l_0 < l_1$. Continuăm inductiv acest procedeu; presupunem că am determinat elementele $l_0 < l_1 < l_2 < ... < l_n$ ale mulţimii N, unde $l_n = \min(N \setminus \{l_0, ..., l_{n-1}\})$. Mulţimea $N \setminus \{l_0, ..., l_n\}$ este nevidă (este o mulţime infinită) şi deci are un prim element l_{n+1}; evident $l_n < l_{n+1}$. Am definit astfel mulţimea $\{l_0, ..., l_n, ...\} \subseteq N$ cu $l_0 < l_1 < ... < l_n < ...$. Prin inducţie se poate arăta că $l_n \geq n, \forall\, n \in \mathbb{N}$ şi deci, $\forall n \in N, n \in \{l_0, ..., l_n\}$ ceea ce înseamnă că $N = \{l_0, ..., l_n, ...\}$. Astfel am introdus o funcţie strict crescătoare şi surjectivă $\varphi : \mathbb{N} \to N, \varphi(n) = l_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Dacă $\varphi_1 : \mathbb{N} \to N$ este o altă bijecţie strict crescătoare, $\varphi_1(0)$ va fi cel mai mic element al mulţimii N şi astfel va coincide cu l_0. $\varphi_1(1)$ este cel mai mic element al mulţimii $N \setminus \{\varphi_1(0)\} = N \setminus \{l_0\}$ şi astfel coincide cu l_1 ş.a.m.d. În general demonstrăm că $\varphi_1(n) = l_n, \forall n \in \mathbb{N}$ ceea ce arată că $\varphi_1 = \varphi$. ∎

1.3.7 Observaţie. Lema precedentă afirmă de fapt că orice submulţime infinită a lui $\mathbb{N}$ dotată cu ordinea naturală este "asemenea" mulţimii numerelor naturale (are acelaşi număr ordinal). Vom considera de acum fiecare mulţime infinită de numere naturale ordonată strict crescător.

1.3.8 Propoziţie. *Orice subşir al şirului f este restricţia funcţiei f la o submulţime infinită $N \subseteq \mathbb{N}$.*

Demonstraţie. Dacă g este subşir al şirului $f \equiv (x^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $g = f \circ \varphi$, unde $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o funcţie strict crescătoare; atunci $g \equiv (x^{l_n})_{n\in\mathbb{N}}$ unde $l_n = \varphi(n), \forall n \in \mathbb{N}$. Să observăm că mulţimea $N = \varphi(\mathbb{N}) = \{l_n : n \in \mathbb{N}\}$ este o mulţime infinită de numere naturale şi că $g \equiv (x^n)_{n\in N} = f|_N$.

Invers, fie $N \subseteq \mathbb{N}$ a.î. este o mulţime infinită de numere naturale şi fie $\varphi : \mathbb{N} \to N$ unica bijecţie strict crescătoare a cărei existenţă este asigurată de lema de mai sus; dacă $g = f|_N$, atunci $g \equiv f \circ \varphi$ este un subşir al şirului f. ∎

1.3.9 Observaţie. În cele ce urmează vom folosi noţiunea de subşir al unui şir $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$, după cum va fi mai convenabil, în una din cele două accepţiuni:

1. $(x^{l_n})_{n\in\mathbb{N}}$, unde (l_n) este un şir strict crescător de numere naturale sau
2. $(x^n)_{n\in N}$ unde N este o submulţime infinită de numere naturale.

Capitolul 1

Elemente de topologie în $\mathbb{R}^k$

1.3 Structura topologică uzuală pe $\mathbb{R}^k$

1.3.10 Definiţie. *Fie $(x^n)_n \subseteq \mathbb{R}^k$ un şir de vectori şi fie $x \in \mathbb{R}^k$; vom spune că şirul $(x^n)_n$* **converge la x** *dacă oricare ar fi o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x)$ există un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ aşa fel încît oricare ar fi $n \geq n_0, x^n \in V$; vom nota aceasta prin $x^n \to x$ sau, cînd vrem să marcăm spaţiul în care are loc convergenţa, $x^n \underset{\mathbb{R}^k}{\longrightarrow} x$.*

Şirul $(x^n) \subseteq \mathbb{R}^k$ este **convergent** *dacă există $x \in \mathbb{R}^k$ a.î. $x^n \to x$; vectorul x se va numi* **limita** *şirului convergent (x^n). Un şir care nu este convergent se numeşte* **divergent**.

A stabili **natura** *unui şir înseamnă a stabili dacă el este convergent sau dacă este divergent.*

1.3.11 Observaţie. Formal, definiţia coincide cu aceea de la şiruri de numere reale. De altfel, în orice spaţiu abstract în care, printr-un procedeu oarecare, am definit noţiunea de vecinătate putem defini similar noţiunea de şir convergent.

1.3.12 Propoziţie. *Un şir $(x^n) \subseteq \mathbb{R}^k$ este convergent la x dacă şi numai dacă şirul de numere reale $(\|x^n - x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent la zero.*

Demonstraţie. ($\Longrightarrow$) Presupunem că $x^n \to x$ şi fie $\varepsilon > 0$ arbitrar; atunci sfera $S(x,\varepsilon) \in \mathcal{V}(x)$ şi deci există $n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\ n \geq n_0, x^n \in S(x,\varepsilon)$ ceea ce este echivalent cu $\|x^n - x\| < \varepsilon$. Deci $\|x^n - x\| \to 0$.

($\Longleftarrow$) Presupunem că $\|x^n - x\| \to 0$ şi fie V o vecinătate arbitrară a lui x. Din definiţia vecinătăţilor, există $r > 0$ a.î. $S(x,r) \subseteq V$ şi astfel există $n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\|x^n - x\| < r, \forall\, n \geq n_0$. De aici rezultă că pentru orice $n \geq n_0$, $x^n \in S(x,r) \subseteq V$. ∎

Convergenţa unui şir de vectori din $\mathbb{R}^k$ se reduce la convergenţa şirurilor de coordonate asociate lui.

1.3.13 Teoremă. *Fie şirul* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^k, x^n = (x_1^n, ..., x_k^n), \forall\, n \in \mathbb{N}$ *şi fie* $x = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$*;*

$$x^n \underset{\mathbb{R}^k}{\longrightarrow} x \Longleftrightarrow x_i^n \underset{\mathbb{R}}{\to} x_i, \forall\, i \in \{1, ..., k\}.$$

Demonstraţie. Demonstraţia teoremei rezultă din inegalităţile:

$$(*) \qquad |x_i^n - x_i| \leq \|x^n - x\| \leq \sqrt{k} \cdot \max\{|x_i^n - x_i| : i = 1, ..., k\}.$$

Într-adevăr, dacă presupunem că $x^n \underset{\mathbb{R}^k}{\longrightarrow} x$ atunci $\|x^n - x\| \to 0$ şi, din prima inegalitate a relaţiei $(*)$, $x_i^n \to x_i, \forall\, i = 1, ..., k$.

Reciproc, dacă $\forall\, i \in \{1, ..., k\}, x_i^n \underset{\mathbb{R}}{\to} x_i$, atunci $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_i \in \mathbb{N}$ a.î.

$$(i) \qquad |x_i^n - x_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}, \forall n \geq n_i.$$

Fie $n_0 = \max\{n_i : i = 1, ..., k\}$; $\forall n \geq n_0$ şi $\forall\, i = 1, ..., k, n \geq n_i$ şi atunci, din relaţia (i),

$$|x_i^n - x_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$$

de unde

$$\sqrt{k} \cdot \max\{|x_i^n - x_i| : i = 1, ..., k\} < \varepsilon.$$

Utilizînd inegalitatea din dreapta relaţiei $(*)$ rezultă că $\|x^n - x\| \to 0$ şi deci $x^n \to x$. ∎

Propoziţia următoare pune în evidenţă cîteva proprietăţi generale ale şirurilor convergente; vom face observaţia că acestea sînt asemănătoare proprietăţilor generale ale convergenţei şirurilor de numere reale.

1.3.14 Propoziţie.

1). Limita unui şir convergent este unică.

2). Orice şir convergent este mărginit.

3). $x^n \underset{\mathbb{R}^k}{\longrightarrow} x \Longrightarrow \|x^n\| \underset{\mathbb{R}}{\to} \|x\|$.

4). Dacă într-un şir schimbăm ordinea termenilor natura sa nu se schimbă iar în cazul în care este convergent limita sa rămîne aceeaşi.

5). Dacă unui şir îi adăugăm sau îi suprimăm un număr finit de termeni natura şirului nu se schimbă iar în caz de convergenţă nici limita.

6). Orice subşir al unui şir convergent converge la aceeaşi limită.

Demonstraţie. Deoarece convergenţa şirurilor în $\mathbb{R}^k$ este echivalentă cu convergenţa şirurilor de coordonate, demonstraţia proprietăţilor 1), 4), 5) şi 6) se bazează pe proprietăţile similare ale şirurilor de numere reale.

2). Fie $(x^n) \in \mathbb{R}^k$ convergent şi fie $x \in \mathbb{R}^k$ limita sa; atunci $\|x^n - x\| \to 0$. Pentru $\varepsilon = 1, \exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ a.î. $\|x^n - x\| < 1, \forall\, n \geq n_1$. Notăm cu

$$r = \max\{\|x^0\|, \|x^1\|, ..., \|x^{n_1-1}\|, \|x\| + 1\};$$

atunci, $\forall\, n \in \mathbb{N}, \|x^n\| \leq r$. Într-adevăr, dacă $n < n_1$, atunci este evidentă inegalitatea iar dacă $n \geq n_1, \|x^n\| \leq \|x^n - x\| + \|x\| < 1 + \|x\| \leq r$.

Rezultă că $\{x^n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq T(0, r)$ şi deci (x^n) este un şir mărginit (mulţimea termenilor săi este o mulţime mărginită).

3). Presupunem că $x^n \underset{\mathbb{R}^k}{\longrightarrow} x$; atunci, cum

$$|\|x^n\| - \|x\|| \leq \|x^n - x\|, \forall\, n \in \mathbb{N},$$

rezultă că $\|x^n\| \underset{\mathbb{R}}{\to} \|x\|$. ∎

Operaţii cu şiruri convergente

1.3.15 Propoziţie. *Fie $(x^n), (y^n) \subseteq \mathbb{R}^k, x, y \in \mathbb{R}^k, (t_n) \subseteq \mathbb{R}$ şi $t \in \mathbb{R}$; atunci:*

1). $\left.\begin{array}{l} x^n \to x \\ y^n \to y \end{array}\right\} \Longrightarrow x^n + y^n \to x + y.$

2). $\left.\begin{array}{l} x^n \to x \\ t_n \to t \end{array}\right\} \Longrightarrow t_n \cdot x^n \to t \cdot x.$

3). $\left.\begin{array}{l} x^n \to x \\ y^n \to y \end{array}\right\} \Longrightarrow (x^n, y^n) \to (x, y).$

Demonstraţie.

1). Deoarece $x^n \to x$ şi $y^n \to y$, $\|x^n - x\| \to 0$ şi $\|y^n - y\| \to 0$; concluzia este o consecinţă a inegalităţii:

$$\|(x^n + y^n) - (x + y)\| \le \|x^n - x\| + \|y^n - y\|.$$

2). $\|t_n \cdot x^n - t \cdot x\| \le \|t_n \cdot x^n - t_n \cdot x\| + \|t_n \cdot x - t \cdot x\| = |t_n| \cdot \|x^n - x\| + |t_n - t| \cdot \|x\|$. Deoarece (t_n) este convergent la t (deci este şi mărginit !) iar (x^n) este convergent la x, din inegalitatea de mai sus rezultă că $t_n \cdot x^n \to t \cdot x$.

3). $|(x^n, y^n) - (x, y)| \le |(x^n - x, y^n)| + |(x, y^n - y)| \le \|x^n - x\| \cdot \|y^n\| + \|x\| \cdot \|y^n - y\|$. Deoarece (x^n) este convergent la x şi (y^n) este convergent la y (deci şi mărginit !), rezultă din relaţia de mai sus că $(x^n, y^n) \to (x, y)$. ∎

Teoreme fundamentale

Rezultatele următoare reprezintă instrumente fundamentale ale teoriei convergenţei în $\mathbb{R}^k$; formal ele sînt identice cu rezultatele similare de pe $\mathbb{R}$.

1.3.16 Teoremă. *Orice şir monoton crescător şi mărginit converge la marginea superioară a mulţimii termenilor săi.*

Orice şir monoton descrescător şi mărginit converge la marginea inferioară a mulţimii termenilor săi.

Demonstraţie. Fie $(x^n) \subseteq \mathbb{R}^k$ un şir crescător şi mărginit, unde $\forall\ n \in \mathbb{N}, x^n = (x_1^n, ..., x_k^n)$. Ţinînd cont de definiţia relaţiei de ordine rezultă că $\forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ i \in \{1, ..., k\}, x_i^n \le x_i^{n+1}$. În plus (x^n) fiind şi mărginit, există $x = (x_1, ..., x_k) = \sup\{x^n : n \in \mathbb{N}\}$. Aşa cum a rezultat din demonstraţia teoremei 1.2.4, $x_1 = \sup\{x_1^n : n \in \mathbb{N}\}, ..., x_k = \sup\{x_k^n : n \in \mathbb{N}\}$. Rezultă atunci din teorema de convergenţă a şirurilor monotone de numere reale că $x_1 = \lim_n x_1^n, ..., x_k = \lim_n x_k^n$ şi astfel, utilizînd teorema 1.3.13, $x^n \to x$.

Pentru şiruri descrescătoare demonstraţia este asemănătoare. ∎

1.3.17 Corolar. *Orice şir monoton şi mărginit în $\mathbb{R}^k$ este convergent.*

1.3.18 Teoremă (lema lui Cesàro). *Orice şir mărginit în $\mathbb{R}^k$ are subşiruri convergente.*

Demonstraţie. Vom face demonstraţia în cazul particular $k = 2$. Fie (x^n) un şir mărginit din $\mathbb{R}^2, x^n = (x_1^n, x_2^n)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ şi fie $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ un minorant iar $y^0 = (y_1^0, y_2^0)$ un majorant al mulţimii termenilor şirului; atunci, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, rezultă $x_1^0 \le x_1^n \le y_1^0$ şi $x_2^0 \le x_2^n \le y_2^0$.

Şirul $(x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ fiind mărginit în $\mathbb{R}$, varianta scalară a lemei lui Cesàro ne asigură existenţa unei mulţimi infinite $N_1 \subseteq \mathbb{N}$ şi a unui punct $x_1 \in \mathbb{R}$ a.î. $(x_1^n)_{n\in N_1} \to x_1$. $(x_2^n)_{n\in N_1}$ este subşir al şirului $(x_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$; fiind la rîndul său mărginit, există o mulţime infinită $N_2 \subseteq N_1$ şi un punct $x_2 \in \mathbb{R}$ a.î. $(x_2^n)_{n\in N_2} \to x_2$. Şirul $(x_1^n)_{n\in N_2}$ este subşir al şirului $(x_1^n)_{n\in N_1}$ şi deci $(x_1^n)_{n\in N_2} \to x_1$. Rezultă atunci că şirul $(x^n)_{n\in N_2}$ este un subşir al şirului $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent la $x = (x_1, x_2)$.

În cazul general demonstraţia este similară.

(!) Fie (x^n) un şir mărginit din $\mathbb{R}^k, x^n = (x_1^n, ..., x_k^n)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ şi fie $x^0 = (x_1^0, ..., x_k^0)$ un minorant iar $y^0 = (y_1^0, ..., y_k^0)$ un majorant al mulţimii termenilor şirului; $\forall\ n \in \mathbb{N}$ şi $\forall\ i \in \{1, ..., k\}$ rezultă $x_i^0 \le x_i^n \le y_i^0$.

Şirul $(x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ fiind mărginit în $\mathbb{R}$, varianta scalară a lemei lui Cesàro ne asigură existenţa unei mulţimi infinite $N_1 \subseteq \mathbb{N}$ şi a unui punct $x_1 \in \mathbb{R}$ a.î. $(x_1^n)_{n\in N_1} \to x_1$. Subşirul $(x_2^n)_{n\in N_1}$ al şirului $(x_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ fiind la rîndul său mărginit, există o mulţime infinită $N_2 \subseteq N_1$ şi un punct $x_2 \in \mathbb{R}$ a.î. $(x_2^n)_{n\in N_2} \to x_2$. În acelaşi mod obţinem mulţimile infinite $N_2 \supseteq N_3 \supseteq ... \supseteq N_k$ şi punctele $x_3, ..., x_k \in \mathbb{R}$ a.î. $(x_3^n)_{n\in N_3} \to x_3, ..., (x_k^n)_{n\in N_k} \to x_k$. Şirurile $(x_i^n)_{n\in N_k}$ sînt subşiruri ale şirurilor $(x_i^n)_{n\in N_i}, \forall\ i \in \{1, ..., k\}$ şi deci $(x_i^n)_{n\in N_k} \to x_i, \forall\ i \in \{1, ..., k\}$. Rezultă atunci că şirul $(x^n)_{n\in N_k}$ este un subşir al şirului $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent la $x = (x_1, ..., x_k)$. ■

Înainte de a enunţa următoarea teoremă vom defini noţiunea de şir Cauchy.

1.3.19 Definiţie. *Un şir $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^k$ se numeşte* **şir Cauchy** *sau* **şir fundamental** *dacă $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î., $\forall n, m \ge n_0, \|x^n - x^m\| < \varepsilon$.*

Rezultă imediat că un şir (x^n) este şir Cauchy dacă şi numai dacă $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \ge k_0, \forall p \in \mathbb{N}, \|x^{n+p} - x^n\| < \varepsilon$.

În teorema 1.3.13 am arătat că un şir de vectori este convergent dacă şi numai dacă sînt convergente toate şirurile sale de coordonate. O proprietate similară are loc şi pentru şirurile Cauchy.

1.3.20 Propoziţie. *Fie $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^k, x^n = (x_1^n, ..., x_k^n), \forall n \in \mathbb{N}$; şirul (x^n) este şir Cauchy în $\mathbb{R}^k$ dacă şi numai dacă şirurile sale de coordonate $(x_1^n)_n, ..., (x_k^n)_n$ sînt şiruri Cauchy în $\mathbb{R}$.*

Demonstraţie. Demonstraţia este o consecinţă imediată a inegalităţilor:

$$(*)\ \ |x_i^n - x_i^m| \le \|x^n - x^m\| \le \sqrt{k} \cdot \max\{|x_i^n - x_i^m| : i = 1, ..., k\}, \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Într-adevăr, dacă $(x^n)_n$ este şir Cauchy, atunci $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î., $\forall n, m \geq n_0, \|x^n - x^m\| < \varepsilon$. Din prima inegalitate din $(*)$ rezultă că, $\forall i = 1, ..., k, |x_i^n - x_i^m| \leq \|x^n - x^m\| < \varepsilon$ deci şirurile $(x_i^n)_n$ sînt şiruri Cauchy în $\mathbb{R}$, $\forall i = 1, ..., k$.

Reciproc, dacă presupunem că, $\forall i = 1, ..., k$, şirul $(x_i^n)_n$ este şir Cauchy în $\mathbb{R}$, atunci $\forall\varepsilon > 0, \exists n_i \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n, m \geq n_i, |x_i^n - x_i^m| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$. Fie atunci $n_0 = \max\{n_1, ..., n_k\}$; $\forall n, m \geq n_0, \sqrt{k} \cdot \max\{|x_i^n - x_i^m| : i = 1, ..., k\} < \varepsilon$ şi utilizînd inegalitatea a doua din $(*)$ obţinem $\|x^n - x^m\| < \varepsilon$ ceea ce arată că şirul $(x^n)_n$ este şir Cauchy în $\mathbb{R}^k$. ∎

1.3.21 Teoremă (teorema lui Cauchy). *Un şir $(x^n) \subseteq \mathbb{R}^k$ este convergent dacă şi numai dacă este şir Cauchy.*

Demonstraţie. Teorema se poate demonstra uşor pe baza propoziţiei precedente şi a variantei scalare a teoremei fundamentale a lui Cauchy. Astfel un şir de vectori $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ este convergent dacă şi numai dacă şirurile sale de coordonate sînt convergente (teorema 1.3.13); teorema lui Cauchy pentru şiruri de numere reale ne asigură atunci că $(x^n)_n$ converge dacă şi numai dacă şirurile sale de coordonate sînt şiruri Cauchy şi, conform propoziţiei precedente, aceasta are loc dacă şi numai dacă $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir Cauchy.

Putem să prezentăm şi o variantă directă de demonstraţie care urmează aceeaşi linie cu demonstraţia teoremei lui Cauchy din $\mathbb{R}$ (să se compare !).

(!) Necesitatea. Presupunem că şirul (x^n) este şir convergent în $\mathbb{R}^k$; atunci există un x unic în $\mathbb{R}^k$ a.î. $x^n \to x$. Rezultă că $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0, \|x^n - x\| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Atunci $\forall n, m \geq n_0, \|x^n - x^m\| \leq \|x^n - x\| + \|x^m - x\| < \varepsilon$.

Suficienţa.

1. Fie $(x^n) \subseteq R^k$ un şir Cauchy; vom arăta întîi că (x^n) este mărginit. Într-adevăr, pentru $\varepsilon = 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0, \|x^n - x^{n_0}\| < 1$. Rezultă că $\|x^n\| \leq \|x^n - x^{n_0}\| + \|x^{n_0}\| < 1 + \|x^{n_0}\|$. Atunci, $\forall n \in \mathbb{N}, \|x^n\| \leq M = \max\{\|x^0\|, \|x^1\|, ..., \|x^{n_0-1}\|, 1 + \|x^{n_0}\|\}$ ceea ce arată că (x^n) este mărginit.

2. Deoarece (x^n) este mărginit putem utiliza lema lui Cesàro pentru a pune în evidenţă un subşir $(x^{l_n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent la un element $x \in \mathbb{R}^k$ (aici $(l_n)_n$ este un şir strict crecscător de numere naturale).

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar.
Deoarece (x^n) este şir Cauchy, există $n_1 \in \mathbb{N}$ a.î.

$$\|x^n - x^m\| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n, m \geq n_1. \tag{1}$$

Deoarece $(x^{l_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge la x, există $n_2 \in \mathbb{N}$ a.î.

$$\|x^{l_n} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_2. \tag{2}$$

Fie $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$; $\forall n \geq n_3$ rezultă $l_n \geq n \geq n_1$ şi $n \geq n_2$ şi astfel din (1) şi (2) obţinem:

$$\|x^n - x\| \leq \|x^n - x^{l_n}\| + \|x^{l_n} - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ceea ce arată că $x^n \to x$. ∎

1.3.22 Teoremă (teorema lui Cantor). *Fie $(x^n) \subseteq \mathbb{R}^k$ şi $(r_n) \in (0, +\infty)$; dacă sînt îndeplinite condiţiile:*
1). $T(x^n, r_n) \supseteq T(x^{n+1}, r_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}$,
2). $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$,
atunci există $x \in \mathbb{R}^k$ a.î.
$\bigcap_{n=0}^{\infty} T(x^n, r_n) = \{x\}$.

Demonstraţie. $\forall n, p \in \mathbb{N}, x^{n+p} \in T(x^{n+p}, r_{n+p}) \subseteq T(x^n, r_n)$ de unde

$$\|x^{n+p} - x^n\| \leq r_n. \tag{$*$}$$

Cum $r_n \to 0$, rezultă că (x^n) este şir Cauchy. Teorema lui Cauchy ne asigură existenţa unui element $x \in \mathbb{R}^k$ a.î. $x^n \to x$. Dacă în relaţia $(*)$ trecem la limită pentru $p \to \infty$ obţinem, ţinînd cont de proprietatea de continuitate a normei, $\|x - x^n\| \leq r_n, \forall n \in \mathbb{N}$ ceea ce arată că $x \in T(x^n, r_n), \forall n \in \mathbb{N}$.
Dacă $\bigcap_{n=0}^{\infty} T(x^n, r_n)$ ar mai conţine un element y, atunci $\|x^n - y\| \leq r_n, \forall n \in \mathbb{N}$; rezultă că $x^n \to y$. Cum limita unui şir convergent este unică, $x = y$. ∎

1.3.23 Observaţie. Vom prezenta o variantă a acestei teoreme în care sferele închise vor fi înlocuite cu mulţimi dintr-o clasă mai largă. Pentru aceasta avem nevoie să introducem şi alte elemente de topologie în $\mathbb{R}^k$.

Alte elemente de topologie pe $\mathbb{R}^k$

1.3.24 Definiţie. *Fie $x \in \mathbb{R}^k, A \subseteq \mathbb{R}^k$; spunem că:*
1). x este punct **aderent** *pentru mulţimea A dacă $V \cap A \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{V}(x)$;*

vom nota cu $\bar{A}$ *mulţimea punctelor aderente ale mulţimii* A *şi o vom numi* **aderenţa** *sau* **închiderea** *mulţimii* A.
2). x este punct **de acumulare** *pentru mulţimea* A *dacă* $V \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{V}(x)$; *vom nota cu* A' *mulţimea punctelor de acumulare ale mulţimii* A *şi o vom numi mulţimea* **derivată** *a mulţimii* A.
3). x este punct **interior** *pentru mulţimea* A *dacă* $A \in \mathcal{V}(x)$; *mulţimea punctelor interioare mulţimii* A *se numeşte* **interiorul** *mulţimii* A *şi se notează cu* $\mathring{A}$.
4). x este punct **izolat** *al mulţimii* A *dacă există o vecinătate* $V \in \mathcal{V}(x)$ *a.î.* $V \cap A = \{x\}$.
5). Mulţimea A *este mulţime* **închisă** *dacă* $A = \bar{A}$.
6). Mulţimea A *este mulţime* **deschisă** *dacă* $A = \mathring{A}$.

Capitolul 1

Elemente de topologie în $\mathbb{R}^k$

1.3 Structura topologică uzuală pe $\mathbb{R}^k$

1.3.25 Observaţie. Noţiunile introduse în definiţia precedentă cu ajutorul vecinătăţilor pot fi prezentate echivalent în limbajul unui sistem fundamental de vecinătăţi; vom folosi mulţimea sferelor deschise drept astfel de sistem fundamental de vecinătăţi pentru a obţine următoarele enunţuri echivalente:
1). $x \in \bar{A} \iff \forall \varepsilon > 0, S(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.
2). $x \in A' \iff \forall \varepsilon > 0, S(x, \varepsilon) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$.
3). $x \in \mathring{A} \iff \exists \varepsilon > 0$ a.î. $S(x, \varepsilon) \subseteq A$.
4). x este punct izolat pentru A dacă $\exists \varepsilon > 0$ a.î. $S(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$.

Ţinînd cont de faptul că fiecare punct din $\mathbb{R}^k$ admite un sistem fundamental de vecinătăţi numărabil, putem caracteriza principalele noţiuni topologice introduse prin definiţia 1.3.23 cu ajutorul şirurilor.

1.3.26 Teoremă. *Fie $x \in \mathbb{R}^k, A \subseteq \mathbb{R}^k$; atunci:*
1). x este punct aderent pentru A dacă şi numai dacă există un şir $(x^n) \subseteq A$ a.î. $x^n \to x$.
2). x este punct de acumulare pentru A dacă şi numai dacă există un şir $(x^n) \subseteq A \setminus \{x\}$ a.î. $x^n \to x$.
3). A este mulţime închisă dacă şi numai dacă oricare ar fi un şir convergent $(x^n) \subseteq A$, $\lim_n x^n \in A$.

Demonstraţie. 1). Fie $x \in \bar{A}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*, S(x, \frac{1}{n}) \in \mathcal{V}(x)$ şi deci $\exists x^n \in$

$S(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Atunci (x^n) este un şir de puncte din A şi $\|x^n - x\| < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, de unde $x^n \to x$.

Reciproc, dacă există un şir $(x^n) \subseteq A$ convergent la x, atunci, $\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î., $\forall n \geq n_0, x^n \in V$. În particular, $x^{n_0} \in V \cap A$ de unde $V \cap A \neq \emptyset$. Rezultă că $x \in \bar{A}$.

2). Caracterizarea este evidentă dacă ţinem cont de punctul 3). al propoziţiei 1.3.25.

3). Fie A o mulţime închisă, deci $A = \bar{A}$, şi fie $(x^n) \subseteq A$ un şir convergent la x; din punctul 1). $x \in \bar{A} = A$. Reciproc, presupunem că orice şir convergent din A are limita în A. Ştim că $A \subseteq \bar{A}$ (vezi propoziţia 1.3.26 punctul 1).); $\forall x \in \bar{A}, \exists (x^n) \subseteq A$ a.î. $x^n \to x$ (punctul 1).) şi astfel $x \in A$. Rezultă că $A = \bar{A}$ deci A este mulţime închisă.

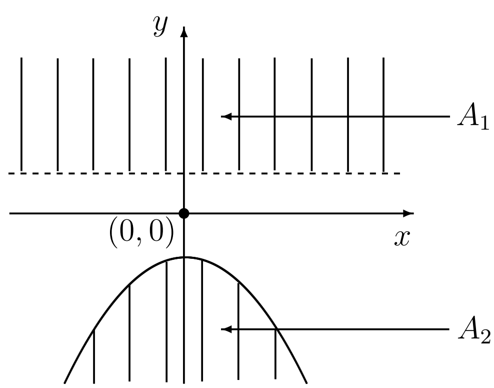
■

1.3.27 Exemple.

1). Sferele închise sînt mulţimi închise; sferele deschise sînt mulţimi deschise. Într-adevăr, dacă am presupune că există o sferă închisă $T(x, r)$ care nu este mulţime închisă ar rezulta că $\exists y \in \overline{T(x, r)} \setminus T(x, r)$; atunci $\varepsilon = \|x - y\| - r > 0$ şi deci $S(y, \varepsilon) \cap T(x, r) \neq \emptyset$. Fie z un punct din intersecţie; atunci $\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| < r + \varepsilon = \|x - y\|$ ceea ce este absurd.

Fie acum $S(x, r)$ o sferă deschisă arbitrară din $\mathbb{R}^k$; să arătăm că este vecinătate pentru orice punct al ei. Fie $y \in S(x, r)$ şi $\varepsilon = r - \|x - y\| > 0$. Vom demonstra că $S(y, \varepsilon) \subseteq S(x, r)$ de unde va rezulta că $S(x, r)$ este vecinătate pentru y. $\forall z \in S(y, \varepsilon), \|z - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| < \varepsilon + \|x - y\| = r$ ceea ce arată că $z \in S(x, r)$.

2). Fie $A = A_1 \cup A_2 \cup \{(0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ unde $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1\}$ iar $A_2 = \{(x, y) :\in \mathbb{R}^2 : y \leq -x^2 - 1\}$. Imaginea mulţimii A este schiţată în imaginea de mai jos.



Atunci $\bar{A} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \{(0,0)\}$ unde $\bar{A}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1\}$, $\bar{A}_2 = A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -x^2-1\}$, $A' = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$, $\mathring{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1,$ sau $y < -x^2-1\}$; punctul $(0,0)$ este singurul punct izolat al mulţimii A. Mulţimea A_1 este mulţime deschisă iar mulţimea A_2 este mulţime închisă. Mulţimea A nu este nici deschisă nici închisă.

Remarcăm aici că dacă o mulţime nu este deschisă nu rezultă că ar fi închisă !!

3). Dreapta ce trece prin punctele x şi y din $\mathbb{R}^k$,

$$(x,y) = \{x + t \cdot (y-x) : t \in \mathbb{R}\}$$

este o mulţime închisă în $\mathbb{R}^k$ care nu are puncte interioare. Pentru a demonstra că (x,y) este mulţime închisă este suficient să arătăm că orice punct care nu aparţine dreptei nu este punct aderent pentru aceasta.

Fie $z \notin (x,y); \forall t \in \mathbb{R}$, fie $u = x + t\cdot(y-x) \in (x,y)$. Atunci

$$(*)\quad \|z-u\|^2 = (z-u, z-u) = (z-x, z-x) - 2t\cdot(z-x, y-x) + t^2\cdot(y-x, y-x) =$$

$$= \|x-y\|^2 \cdot t^2 - 2t \cdot (z-x, y-x) + \|z-x\|^2.$$

Trinomul de gradul doi în t de mai sus are discriminantul

$$\Delta = 4\left[(z-x, y-x)^2 - \|z-x\|^2 \cdot \|x-y\|^2\right] \leq 0$$

(inegalitatea lui Cauchy $|(z-x, y-x)| \leq \|z-x\| \cdot \|y-x\|$ din propoziţia 1.1.18). Mai mult, discriminantul $\Delta < 0$ deoarece $(z-x, y-x) = \|z-x\| \cdot \|y-x\|$ are loc dacă şi numai dacă există $t \in \mathbb{R}$ a.î. $z - x = t(y-x)$ ceea ce este imposibil $(z \notin (x,y))$. Atunci din $(*)$

$$\|z-u\|^2 \geq -\frac{\Delta}{4\cdot\|x-y\|^2} = \frac{\|z-x\|^2 \cdot \|x-y\|^2 - (z-x, y-x)^2}{\|x-y\|^2} = r^2 > 0.$$

Din cele de mai sus rezultă că sfera deschisă $S(z,r)$ nu întîlneşte (x,y) şi deci $z \notin \overline{(x,y)}$.

Segmentul închis $[x^0, y^0] = \{x^0 + t\cdot(y^0 - x^0) : t \in [0,1]\}$ este de asemenea mulţime închisă. Trebuie să menţionăm aici că segmentul deschis $]x^0, y^0[= \{x^0 + t\cdot(y^0-x^0) : t \in]0,1[\}$ nu este însă mulţime deschisă în cazul $k \geq 2$. Dacă $x^0 < y^0$, mulţimea $\{x \in \mathbb{R}^k : x^0 < x < y^0\}$ (paralelipipedul deschis) este mulţime deschisă.

4). Mulţimea $A = \{tx + sy + (1-t-s)z : t, s \in \mathbb{R}\}$ din $\mathbb{R}^3$ (graficul unui plan care trece prin punctele x, y, z) este o mulţime închisă în $\mathbb{R}^3$ fără puncte interioare.

Prezentăm mai jos cîteva relaţii imediate între noţiunile introduse:

1.3.28 Propoziţie.
1). $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \bar{A}, A' \subseteq \bar{A}, \bar{A} = A \cup A'$.
2). Mulţimea punctelor izolate ale mulţimii A este egală cu $\bar{A} \setminus A'$ şi deci cu $A \setminus A'$ (un punct aderent pentru A este sau punct de acumulare sau punct izolat al mulţimii A).
3). $x \in A' \Longleftrightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.
4). O mulţime A este închisă dacă şi numai dacă $A' \subseteq A$.
5). O mulţime A este deschisă dacă şi numai dacă A este vecinătate pentru orice punct al ei.

Demonstraţie. 1). $\forall x \in \mathring{A}, A \in \mathcal{V}(x)$ şi deci $x \in A$; $\forall x \in A, \forall V \in \mathcal{V}(x), x \in A \cap V$, deci $V \cap A \neq \emptyset$ ceea ce spune că $x \in \bar{A}$.
Am arătat deci că: $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \bar{A}$.
$A' \subseteq \bar{A}$ rezultă imediat din definiţia punctelor de acumulare.
Din cele demonstrate pînă acum rezultă că $A \cup A' \subseteq \bar{A}$. Fie acum un element arbitrar $x \in \bar{A}$; dacă $x \in A$ atunci $x \in A \cup A'$. Dacă $x \notin A, \forall V \in \mathcal{V}(x)$,
$V \cap A \setminus \{x\} = V \cap A \neq \emptyset$ (x este punct aderent pentru A). Rezultă că $x \in A'$. Aceasta demonstrează incluziunea inversă $\bar{A} \subseteq A \cup A'$.

2). Fie x un punct izolat al mulţimii A şi fie V o vecinătate a sa a.î. $V \cap A = \{x\}$; atunci $x \in A \subseteq \bar{A}$ şi evident că $x \notin A'$. Invers, dacă $x \in \bar{A} \setminus A'$ atunci din 1) $x \in A$; cum $x \notin A'$ există o vecinătate a sa V a.î. $V \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$; atunci $V \cap A = \{x\}$ şi deci x este punct izolat al mulţimii A.

3). Este evidentă.

4). Din 1). $\bar{A} = A \cup A'$; A este închisă dacă şi numai dacă $A = \bar{A} = A \cup A'$ ceea ce este echivalent cu $A' \subseteq A$.

5). Este o consecinţă imediată a definiţiilor mulţimilor deschise şi a punctelor interioare. ∎

Propoziţia următoare prezintă cîteva proprietăţi ale mulţimilor închise şi ale celor deschise.

1.3.29 Propoziţie. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^k$; atunci:*
1). A este mulţime închisă dacă şi numai dacă $\mathbb{R}^k \setminus A$ este mulţime deschisă.
2). $\bar{A}$ este mulţime închisă (cea mai mică mulţime închisă care conţine

mulţimea A).
3). $\mathring{A}$ este mulţime deschisă (cea mai mare mulţime deschisă conţinută în mulţimea A).

ⓘ **Demonstraţie**. 1). Presupunem că A este mulţime închisă ($A = \bar{A}$); pentru a demonstra că $\mathbb{R}^k \setminus A$ este deschisă trebuie să arătăm că $\mathbb{R}^k \setminus A = \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}^k \setminus A}}$. Incluziunea $\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}^k \setminus A}} \subseteq \mathbb{R}^k \setminus A$ este asigurată de punctul 1). al propoziţiei 1.3.26. Fie acum $x \in \mathbb{R}^k \setminus A$; rezultă că $x \notin A = \bar{A}$. Există deci o vecinătate V a lui x a.î. $V \cap A = \emptyset$ sau, echivalent, $V \subseteq \mathbb{R}^k \setminus A$. Ultima incluziune ne asigură că $\mathbb{R}^k \setminus A$ este vecinătate a punctului x şi deci că $x \in \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}^k \setminus A}}$.

Reciproc, fie $\mathbb{R}^k \setminus A$ mulţime deschisă şi $x \in \bar{A}$; dacă presupunem că $x \notin A$ atunci $x \in \mathbb{R}^k \setminus A = \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}^k \setminus A}}$ şi deci $\mathbb{R}^k \setminus A \in \mathcal{V}(x)$. Cum $x \in \bar{A}$ ar trebui ca $(\mathbb{R}^k \setminus A) \cap A \neq \emptyset$ ceea ce este absurd. Deci ipoteza $x \notin A$ este falsă, de unde rezultă că $A = \bar{A}$ şi deci A este mulţime închisă.

2). A arăta că $\bar{A}$ este închisă revine la a demonstra că $\bar{A} = \bar{\bar{A}}$; din propoziţia 1.3.26 punctul 1). ştim că $\bar{A} \subseteq \bar{\bar{A}}$. Presupunem că incluziunea inversă nu are loc şi fie atunci $x \in \bar{\bar{A}} \setminus \bar{A}$. Deoarece x nu este punct aderent pentru A, există o vecinătate V a sa a.î. $V \cap A = \emptyset$. Din proprietatea (V_4) a teoremei 1.3.2 există o vecinătate $W \in \mathcal{V}(x)$ a.î. $V \in \mathcal{V}(y), \forall y \in W$. Deoarece $x \in \bar{\bar{A}}, W \cap \bar{A} \neq \emptyset$. Fie atunci $y \in W \cap \bar{A}$. Rezultă că $V \in \mathcal{V}(y)$ şi, cum $y \in \bar{A}$, $V \cap A \neq \emptyset$ ceea ce reprezintă o contradicţie.

Fie acum $F = \bar{F}$ o altă mulţime închisă ce conţine A; $\forall x \in \bar{A}, \exists (x^n) \subseteq A \subseteq F$ a.î. $x^n \to x$. Caracterizarea mulţimilor închise dată în teorema 1.3.28 punctul 3). ne permite să afirmăm că $x = \lim_k x^n \in F$. Deci $\bar{A} \subseteq F$.

3). Demonstraţia este asemănătoare celei de la punctul precedent; se arată că $\mathring{A} = \mathring{\mathring{A}}$. ■

Putem acum extinde teorema lui Cantor (teorema 1.3.22) de la clasa sferelor închise la aceea a mulţimilor închise; să definim întîi diametrul unei mulţimi mărginite.

1.3.30 Definiţie. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^k$ o mulţime mărginită; după propoziţia 1.2.8 există $r > 0$ a.î. $A \subseteq T(0, r)$; atunci, $\forall x, y \in A, d(x, y) = \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2 \cdot r$. Deci mulţimea $\{d(x, y) = \|x - y\| : x, y \in A\}$ este mărginită în $\mathbb{R}$ şi deci există*

$$\delta(A) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in A\} \in \mathbb{R}_+$$

Numărul $\delta(A)$ se numeşte **diametrul** *mulţimii A.*

1.3.31 Teoremă (teorema lui Cantor). *Fie $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de mulţimi închise nevide din $\mathbb{R}^k$; dacă sînt îndeplinite condiţiile:*
1). $F_n \supseteq F_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$,
2). $\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$,
atunci există $x \in \mathbb{R}^k$ a.î.

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n = \{x\}.$$

Demonstraţie. Demonstraţia este asemănătoare demonstraţiei teoremei 1.3.22. Fie $x^n \in F_n, \forall n \in \mathbb{N}$ (F_n sînt mulţimi nevide). Atunci, $\forall n, p \in \mathbb{N}, x^{n+p} \in F_{n+p} \subseteq F_n$ de unde $\|x^{n+p} - x^n\| \leq \delta(F_n) \to 0$. Rezultă că (x^n) este şir Cauchy în $\mathbb{R}^k$ şi deci converge la un $x \in \mathbb{R}^k$. Dar, $\forall n \in \mathbb{N}, (x^m)_{m\geq n} \subseteq F_n$ de unde rezultă că $x \in F_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Deoarece $\delta(F_n) \to 0$, intersecţia acestor mulţimi nu poate conţine şi alte puncte. ∎

Vom introduce acum o noţiune topologică de mare importanţă în întreaga analiză matematică: noţiunea de mulţime compactă.

1.3.32 Definiţie. *O mulţime $A \subseteq \mathbb{R}^k$ se numeşte mulţime* **compactă** *dacă pentru orice şir de elemente din A se poate găsi un subşir convergent la un punct din A.*

Înainte de a da exemple de mulţimi compacte vom prezenta o caracterizare importantă a acestor mulţimi în $\mathbb{R}^k$.

1.3.33 Teoremă. *O submulţime din $\mathbb{R}^k$ este compactă dacă şi numai dacă este mărginită şi închisă.*

Demonstraţie. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^k$ o mulţime compactă; să presupunem întîi că A nu este mărginită. Rezultă din propoziţia 1.2.8 că nu există nici-o sferă închisă centrată în origine care să conţină mulţimea A. Deci $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x^n \in A \setminus T(0,n)$. Atunci şirul $(x^n) \subseteq A$ şi, cum A este compactă, există $(x^{l_n})_{n\in\mathbb{N}}$ un subşir al său convergent la un punct din A. Pe de altă parte, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|x^{l_n}\| > l_n \geq n$ ceea ce conduce la concluzia absurdă că acest subşir este nemărginit. Deci ipoteza că A este nemărginită este falsă.

Să arătăm că A este închisă. Vom folosi punctul 3). al teoremei 1.3.28. Fie deci $(x^n) \subseteq A$ un şir convergent şi fie $x = \lim_n x^n$; deoarece A este compactă există un subşir (x^{l_n}) al şirului (x^n) convergent la un punct $y \in A$.

Rezultă că $x^{l_n} \to x$ şi, cum limita unui şir convergent este unică, $x = y$. Deci $\lim_n x^n \in A$ ceea ce arată că A este închisă.

Reciproc, să presupunem că A este o mulţime mărginită şi închisă din $\mathbb{R}^k$ şi să considerăm un şir $(x^n) \subseteq A$. Rezultă că (x^n) este mărginit şi atunci, din lema lui Cesàro (teorema 1.3.18), el are un subşir $(x^{l_n}) \subseteq A$ convergent. Deoarece A este închisă $\lim_n x^{l_n} \in A$. Deci A este compactă. ■

1.3.34 Exemple. 1). Submulţimile finite ale lui $\mathbb{R}^k$ sînt mulţimi compacte (orice şir de elemente dintr-o astfel de mulţime conţine un subşir constant).
2). Sferele închise sînt mulţimi compacte (sînt mulţimi mărginite şi închise - vezi punctul 1) de la exemplul 1.3.27).
3). Segmentele închise sînt mulţimi compacte (vezi punctul 3) de la exemplul 1.3.27); semidreptele sau dreptele nu sînt compacte.

Capitolul 2

Funcţii de mai multe variabile

2.1 Definiţii. Exemple.

2.1.1 Definiţie. *Fie* $A \subseteq \mathbb{R}^k$ *şi* $f : A \to \mathbb{R}^l$*;*
• *dacă* $k = l = 1$*,* f *este o funcţie reală de o variabilă reală,*
• *dacă* $k > 1$ *şi* $l = 1$*,* f *este o funcţie reală sau* **scalară** *de mai multe variabile,*
• *dacă* $k = 1$ *şi* $l > 1$*,* f *este o funcţie* **vectorială** *de o variabilă reală,*
• *în sfîrşit în cazul* $k > 1, l > 1$*,* f *este o funcţie vectorială de mai multe variabile reale.*
Mulţimea $G_f = \{(x, f(x) : x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \equiv \mathbb{R}^{k+l}$ *se numeşte* **graficul** *funcţiei* f*.*

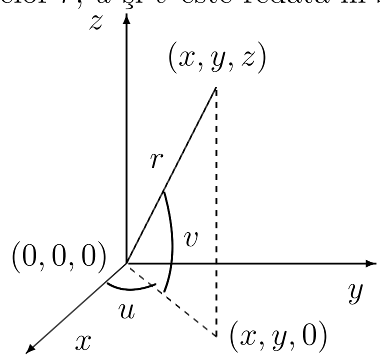
2.1.2 Exemple.

1). Fie $x^0, y^0 \in \mathbb{R}^k$; funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k, f(t) = x^0 + t(y^0 - x^0), \forall t \in \mathbb{R}$, este o funcţie vectorială de o variabilă. Graficul lui f este dreapta care trece prin punctele x^0 şi y^0. $f|_{[0,1]}$ - restricţia acestei funcţii la intervalul închis $[0, 1]$ - are drept grafic segmentul de capete x^0 şi y^0.

2). Fie $x^0, y^0, z^0 \in \mathbb{R}^3$; funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(t, s) = t \cdot x^0 + s \cdot y^0 + (1 - t - s) \cdot z^0, \forall (t, s) \in \mathbb{R}^2$, are drept grafic planul care trece prin x^0, y^0 şi z^0.

3). Aplicaţia $f : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ definită prin $f(r, u) = (x, y)$ unde $\begin{cases} x = r\cos u, \\ y = r \sin u \end{cases}$ este o surjecţie; ea reprezintă trecerea de la coordonatele carteziene în plan la cele polare. Restricţia ei la $(0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ este o bijecţie pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

4). Aplicaţia $f : [0, +\infty)\times[0, 2\pi)\times[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$ definită prin $f(r, u, v) = (x, y, z)$ unde $\begin{cases} x = r\cos u \cos v, \\ y = r \sin u \cos v \\ z = r \sin v \end{cases}$ este o surjecţie; ea reprezintă trecerea de la coordonatele carteziene la coordonatele polare în spaţiu. Semnificaţia variabilelor r, u şi v este redată în schiţa de mai jos.



Restricţia acestei aplicaţii la $(0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ este o bijecţie pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$

5). Norma $\|\cdot\|$ pe $\mathbb{R}^k$ este o aplicaţie scalară de mai n variabile reale. Produsul scalar $(\cdot, \cdot)$ pe $\mathbb{R}^k$ este o aplicaţie scalară de $2 \cdot k$ variabile.

2.1.3 Definiţie. *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$; $\forall x \in A, f(x) \in \mathbb{R}^l$ deci $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$ unde $f_1, ..., f_m : A \to \mathbb{R}$ sînt funcţii scalare. Funcţiile $f_1, ..., f_m$ se numesc* **funcţiile de coordonate** *ale lui f. Dacă $e_1, ..., e_m$ este baza canonică în $\mathbb{R}^l$ ($e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, unde cifra 1 este plasată pe locul i) atunci, $\forall x \in \mathbb{R}^k, \forall i \in \{1, ..., m\}, f_i(x) = (f(x), e_i)$ sau, scris funcţional, $f_i = (f, e_i)$.*

Vom mai scrie $f = (f_1, ..., f_m)$ pentru a nota că $f_1, ..., f_m$ sînt funcţiile scalare de coordonate ale funcţiei f.

Operaţii cu funcţii

Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ şi $t \in \mathbb{R}$; definim atunci funcţiile sumă, produs cu scalari şi produs scalar în felul următor:
- $f + g : A \to \mathbb{R}^l, (f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in A$;
- $t \cdot f : A \to \mathbb{R}^l, (t \cdot f)(x) = t \cdot f(x), \forall x \in A$;
- $(f, g) : A \to \mathbb{R}, (f, g)(x) = (f(x), g(x)), \forall x \in A$.

Primele două sînt funcţii vectoriale iar ultima este funcţie scalară.

Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l, f = (f_1, ..., f_m)$ iar $g : B \subseteq \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^p, g = (g_1, ..., g_p)$ şi dacă este îndeplinită condiţia de compunere $f(A) \subseteq B$ atunci putem defini funcţia compusă:

• $g \circ f : A \to \mathbb{R}^p, (g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall x \in A$. Funcţia $g \circ f$ se reprezintă prin funcţiile sale de coordonate prin:

$$g \circ f = (g_1(f_1, ..., f_m), ..., g_p(f_1, ..., f_m)).$$

2.2 Limite de funcţii

În cele ce urmează vom defini noţiunea de limită a unei funcţii de mai multe variabile într-un punct de acumulare a mulţimii de definiţie.

2.2.1 Definiţie. *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ şi $a \in A'$ (a punct de acumulare pentru A); spunem că elementul $L \in \mathbb{R}^l$ este* **limita** *funcţiei f în punctul a dacă pentru orice şir $(x^n) \subseteq A \setminus \{a\}, x^n \underset{\mathbb{R}^k}{\longrightarrow} a, f(x^n) \underset{\mathbb{R}^l}{\longrightarrow} L$.*

Vom nota această situaţie cu $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Vom spune că o funcţie f are limită într-un punct de acumulare $a \in A'$ dacă există $L \in \mathbb{R}^l$ a.î. $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

2.2.2 Observaţie. Ca şi în cazul funcţiilor de o variabilă reală apare restricţia $x^n \neq a, \forall k \in \mathbb{N}$; această precauţie se datorează următoarei situaţii: este posibil să avem $a \in A$ şi $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$. Dacă nu am folosi restricţia menţionată, printre şirurile $(x^n) \subseteq A$ cu $x^n \to a$ ar putea figura şi şirul constant $x^n = a, \forall k \in \mathbb{N}$ iar pentru acest şir $f(x^n) \to f(a)$!

Ca şi în cazul convergenţei şirurilor, existenţa limitei unei funcţii vectoriale se reduce la existenţa limitelor funcţiilor sale scalare de coordonate.

2.2.3 Teoremă. *Fie $f = (f_1, ..., f_m) : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$, $a \in A'$ şi $L = (L_1, ..., L_m) \in \mathbb{R}^l$; funcţia vectorială f are limita L în a dacă şi numai dacă, $\forall i \in \{1, ..., m\}$, funcţia scalară f_i are limita L_i în a.*

Demonstraţia este o consecinţă imediată a definiţiei şi a teoremei 1.3.13.

2.2.4 Propoziţie. *Fie $f : (\alpha_1, \alpha_2) \times (\beta_1, \beta_2) \to \mathbb{R}, a \in (\alpha_1, \alpha_2), b \in (\beta_1, \beta_2)$. Presupunem că sînt îndeplinite condiţiile:*

1). $\exists \lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = l$,

2). $\forall x \in (\alpha_1, \alpha_2), \exists \lim_{y \to b} f(x, y) = g(x)$,

3). $\forall y \in (\beta_1, \beta_2), \exists \lim_{x \to a} f(x, y) = h(y)$.

Atunci $\exists \lim_{x \to a} g(x) = l$ şi $\exists \lim_{y \to b} h(y) = l$.

Demonstraţie. Într-adevăr, condiţiile 2). şi 3). definesc funcţiile scalare $g : (\alpha_1, \alpha_2) \to \mathbb{R}$ şi $h : (\beta_1, \beta_2) \to \mathbb{R}$.

Din 1)., $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ a.î. $\forall (x, y) \in (\alpha_1, \alpha_2) \times (\beta_1, \beta_2) \setminus \{(a, b)\}$ cu $|x - a| < \delta$ şi $|y - b| < \delta$ rezultă $|f(x, y) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$; alegem δ destul de mic pentru ca $(a - \delta, a + \delta) \subseteq (\alpha_1, \alpha_2)$ şi $(b - \delta, b + \delta) \subseteq (\beta_1, \beta_2)$.

Fie $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ arbitrar, dar momentan fixat; deoarece $g(x) = \lim_{y\to b} f(x, y)$, $\exists \delta_x > 0$ a.î. $\forall y \in (b - \delta_x, b + \delta_x)$ cu $y \neq x$, $|f(x, y) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$; evident putem alege $\delta_x < \delta$.

Fie un $y \in (b - \delta_x, b + \delta_x) \subseteq (b - \delta, b + \delta)$ cu $y \neq x$; cum $x \in (a - \delta, a + \delta)$ şi $(x, y) \neq (a, b), |f(x, y) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Atunci $|g(x) - l| \leq |g(x) - f(x, y)| + |f(x, y) - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Rezultă că există $\lim_{x\to a} g(x) = l$. Similar se arată că $\lim_{y\to b} h(y) = l$. ■

2.2.5 Definiţie. *Limitele* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} \left[\lim\limits_{y\to b} f(x, y)\right]$ *şi* $\lim_{y\to b} h(y) = \lim_{y\to b} \left[\lim\limits_{x\to a} f(x, y)\right]$ *se numesc* **limite iterate** *ale funcţiei* f *în punctul* (a, b).

2.2.6 Observaţie. Dacă limitele iterate ale unei funcţii într-un punct de acumulare a mulţimii sale de definiţie există şi nu sînt egale, funcţia nu poate avea limită în acel punct. Este însă posibil ca limitele iterate să existe, să fie egale, şi totuşi funcţia să nu aibă limită. Să se studieze în acest sens exemplul următor.

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0} \left[\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)\right] = 0 = \lim\limits_{y\to 0} \left[\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)\right]$ dar funcţia nu are limită în $(0, 0)$.

Capitolul 2

Funcţii de mai multe variabile

2.2 Limite de funcţii

Următoarul rezultat este o caracterizare de tip $\varepsilon - \delta$ pentru limita unei funcţii.

2.2.7 Teoremă. *Fie* $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$, $a \in A'$ *şi* $L \in \mathbb{R}^l$;
$\lim_{x \to a} f(x) = L$ *dacă şi numai dacă*

$$(\varepsilon - \delta) \qquad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ a.î. } \forall x \in A \setminus \{a\}, \|x - a\| < \delta, \|f(x) - L\| < \varepsilon.$$

Demonstraţie. ($\Longrightarrow$): Presupunem că $\lim_{x \to a} f(x) = L$ şi totuşi condiţia $(\varepsilon - \delta)$ nu are loc; atunci există $\varepsilon > 0$ a.î. $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists x^n \in A \setminus \{a\}$ cu $\|x^n - a\| < \frac{1}{k}$ şi $\|f(x^n) - L\| \geq \varepsilon$. Rezultă că $(x^n) \subseteq A \setminus \{a\}, x^n \to a$ şi totuşi $f(x^n) \not\to L$ ceea ce contrazice ipoteza.

($\Longleftarrow$): Presupunem că este îndeplinită condiţia $(\varepsilon - \delta)$ şi fie $(x^n) \subseteq A \setminus \{a\}, x^n \to a$; $\forall \varepsilon > 0$ fie $\delta > 0$ numărul a cărui existenţă este asigurată de condiţia $(\varepsilon - \delta)$. Deoarece $x^n \to a$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall k \geq k_0, \|x^n - a\| < \delta$. Rezultă atunci că $\|f(x^n) - L\| < \varepsilon$ ceea ce arată că $f(x^n) \to L$. ∎

2.2.8 Observaţie. Teorema precedentă poate fi reformulată astfel:
$\lim_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow$ pentru orice sferă $S(L, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^l$ există o sferă $S(a, \delta) \subseteq \mathbb{R}^k$ aşa fel încît, oricare ar fi $x \in A \cap S(a, \delta) \setminus \{a\}$, $f(x) \in S(L, \varepsilon)$.

Putem formula o condiţie echivalentă în limbajul vecinătăţilor.

2.2.9 Propoziţie. $\lim_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(L), \exists U \in \mathcal{V}(a)$ *a.î.* $\forall x \in A \cap U \setminus \{a\}, f(x) \in V$.

Putem acum prezenta o condiţie de existenţă a limitei unei funcţii într-un punct de acumulare a mulţimii sale de definiţie.

2.2.10 Teoremă (teorema lui Cauchy). *O funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ admite limită într-un punct de acumulare $a \in A'$ dacă şi numai dacă*
(C)
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in A \setminus \{a\}, \|x - a\| < \delta, \|y - a\| < \delta, \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$

Demonstraţie. Necesitatea. Presupunem că funcţia f are limită în a; deci există $L \in \mathbb{R}^l$ a.î. $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Utilizînd condiţia $(\varepsilon - \delta)$ din teorema 2.1.7, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ a.î., $\forall x, y \in A \setminus \{a\}, \|x - a\| < \delta, \|y - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \frac{\varepsilon}{2}, \|f(y) - L\| < \frac{\varepsilon}{2}$ de unde $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Suficienţa.

a). Presupunem condiţia (C) îndeplinită şi fie $(x^n) \in A \setminus \{a\}, x^n \to a$; atunci $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall k, l \geq k_0, \|x^n - a\| < \delta, \|x^l - a\| < \delta$. Rezultă că $\|f(x^n) - f(x^l)\| < \varepsilon$. Atunci $(f(x^n))$ este un şir Cauchy în spaţiul $\mathbb{R}^l$ şi deci este convergent (teorema 1.3.20).

b). Fie acum două şiruri $(x^n), (y^n) \subseteq A \setminus \{a\}$ convergente la a; construim atunci şirul $(z^n) \subseteq A \setminus \{a\}$ punînd $z^{2k} = x^n$ şi $z^{2k+1} = y^n, \forall k \in \mathbb{N}$. Şirul (z^n) este convergent la a şi atunci, procedînd în acelaşi fel ca în a)., $(f(z^n))$ este convergent în $\mathbb{R}^l$. Atunci există un element $L \in \mathbb{R}^l$ a.î. $f(x^n) \to L$ şi $f(y^n) \to L$.

Deci pentru orice şir din $(x^n) \subseteq A \setminus \{a\}$ convergent la a şirul $(f(x^n))$ converge la acelaşi element $L \in \mathbb{R}^l$; atunci $\lim_{x \to a} f(x) = L$. ∎

Operaţii cu funcţii cu limită

Demonstraţia propoziţiei următoare se bazează pe definiţia limitei unei funcţii într-un punct de acumulare şi pe operaţiile corespunzătoare cu limite de şiruri.

2.2.11 Propoziţie. *Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ şi $a \in A'$ a.î. $\exists \lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}^l$ şi $\exists \lim_{x \to a} g(x) \in \mathbb{R}^l$; atunci:*

1). $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$,
2). $\lim_{x\to a}(t \cdot f(x)) = t \cdot \lim_{x\to a} f(x)$,
3). $\lim\limits_{x\to a}(f(x), g(x)) = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$,
4). $\lim_{x\to a}\|f(x)\| = \|\lim_{x\to a} f(x)\|$.
Dacă $m = 1, f(A) \subseteq \mathbb{R}^*$ *şi* $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$,
5). $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = \dfrac{1}{\lim_{x\to a} f(x)}$.

2.2.12 Propoziţie. *Fie* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l, a \in A', g : B \subseteq \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^p, b \in B'$ *şi* $f(A) \subseteq B$.

Dacă există $\lim_{x\to a} f(x) = b$, *există* $\lim_{y\to b} g(y) = l$ *şi* $f(x) \neq b, \forall x \in A \setminus \{a\}$ *atunci există* $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = l$.

Demonstraţie. Fie $(x^k) \subseteq A \setminus \{a\}, x^k \to a$; deoarece $f(A) \subseteq B$, şirul $(y^k) = (f(x^k)) \subseteq B$. Cum $f(x) \neq b, \forall x \in A \setminus \{a\}$, $y^k \neq b, \forall k \in \mathbb{N}$. În sfîrşit din $\lim_{x\to a} f(x) = b$ rezultă că $y^k \to b$. Dar $\lim_{y\to b} g(y) = l$ şi deci $(g \circ f)(x^k) = g(y^k) \to l$. Rezultă atunci că există $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = l$. ∎

Semnul unei funcţii cu limită

2.2.13 Propoziţie. *Fie* $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *şi* $a \in A'$*; dacă există* $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ *atunci* $\exists \delta > 0$ *a.î.* $\forall x \in S(a, \delta) \cap A \setminus \{a\}, f(x) \cdot L > 0$ *(funcţia* f *are acelaşi semn cu limita sa* L *pe o vecinătate a punctului* a*).*

Demonstraţie. Deoarece $L \neq 0$, $\varepsilon = \dfrac{|L|}{2} > 0$; utilizînd condiţia $(\varepsilon - \delta)$ din teorema 2.2.4, $\exists \delta > 0$ a.î. $\forall x \in A \setminus \{a\}$ cu $\|x - a\| < \delta$, $|f(x) - L| < \varepsilon$. Rezultă deci că $\forall x \in S(a, \delta) \cap A \setminus \{a\}$,

$$L - \frac{|L|}{2} < f(x) < L + \frac{|L|}{2}.$$

Dacă $L > 0$ rezultă că $f(x) > \dfrac{L}{2} > 0$ iar dacă $L < 0$, $f(x) < \dfrac{L}{2} < 0$. În ambele cazuri $f(x)$ are acelaşi semn cu L şi deci $f(x) \cdot L > 0$. ∎

2.3 Funcţii continue

2.3.1 Definiţie. *Fie* $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ *şi* $a \in A$*; spunem că funcţia* f *este* **continuă în a** *dacă* $\forall (x^n) \subseteq A, x^n \to a \Longrightarrow f(x^n) \to f(a)$.

Funcţia f este **continuă pe mulţimea A** *dacă este continuă în toate punctele mulţimii A.*

Dacă f nu este continuă într-un punct $b \in A$ spunem că f este **discontinuă în b**.

Exemplu. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & ,(x,y) \neq (0,0), \\ 0 & ,(x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \forall (x^n, y^n) \to (a,b), f(x^n, y^n) \to f(a,b)$. Astfel f este continuă în (a,b).

Dacă $(a,b) = (0,0)$ şi considerăm un şir $(x^n) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}, x^n \to 0$ şi un $t \in \mathbb{R}$ atunci şirul $(x^n, t \cdot x^n) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ converge la $(0,0)$ iar $f(x^n, t \cdot x^n) = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$. Rezultă că limita lui $(f(x^n, y^n))$ depinde de t şi deci f este discontinuă în $(0,0)$.

Remarcăm din definiţie că problema continuităţii se pune în toate punctele mulţimii de definiţie a unei funcţii: şi în punctele de acumulare şi în cele izolate; în propoziţia următoare stabilim legătura între existenţa limitei şi continuitatea unei funcţii într-un punct.

2.3.2 Propoziţie. *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ şi fie $a \in A$;*

1). Dacă a este punct izolat pentru A atunci f este continuă în a (fără nici-o altă condiţie).

2). Dacă $a \in A \cap A'$ atunci condiţia necesară şi suficientă ca f să fie continuă în a este ca să existe $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Demonstraţie. 1). Dacă a este punct izolat al mulţimii A atunci există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $V \cap A = \{a\}$. Atunci, $\forall (x^n) \subseteq A$ cu $x^n \to a$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0, x^n = a$. Rezultă că şirul $(f(x^n))$ este constant (cu excepţia unui număr finit de termeni) şi deci converge la constanta $f(a)$.

2). Fie acum $a \in A \cap A'$. Presupunem întîi că f este continuă în a şi că $(x^n) \subseteq A \setminus \{a\}, x^n \to a$; din definiţia continuităţii, $f(x^n) \to f(a)$. Rezultă că există $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Să presupunem acum că există $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Dacă $(x^n) \subseteq A$ este un şir arbitrar cu $x^n \to a$ atunci putem avea următoarele trei situaţii:

a). Şirul (x^n) are toţi termenii (cu excepţia eventuală a unui număr finit dintre ei) diferiţi de a; din definiţia limitei rezultă atunci că $f(x^n) \to f(a)$.

b). Şirul (x^n) are toţi termenii (cu excepţia eventuală a unui număr finit dintre ei) egali cu a; atunci şirul $(f(x^n))$ este un şir constant şi deci converge la valoarea constantei $f(a)$.

c). Şirul (x^n) are o infinitate de termeni egali cu a şi o infinitate de termeni diferiţi de a; fie $N, M \subseteq \mathbb{N}, N \cup M = \mathbb{N}$ două mulţimi infinite a.î. $x^n \neq a, \forall n \in N$ şi $x^n = a, \forall n \in M$. Atunci $(x^n)_{n\in N} \subseteq A \setminus \{a\}$ este un subşir al şirului $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi deci este convergent la a; cum $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, $(f(x^n))_{n\in N} \to f(a)$. Şirul $(x^n)_{n\in M}$ este constant şi deci şi $(f(x^n))_{n\in M}$ este constant egal cu $f(a)$ şi astfel converge la $f(a)$. Rezultă că $(f(x^n))_{n\in\mathbb{N}}$ are două subşiruri convergente la aceeaşi limită $f(a)$, subşiruri ce epuizează şirul; atunci $(f(x^n))_{n\in\mathbb{N}} \to f(a)$.

În toate cele trei situaţii posibile $f(x^n) \to f(a)$ şi astfel f este continuă în a. ■

Propoziţia următoare reduce studiul continuităţii unei funcţii vectoriale la studiul continuităţii funcţiilor scalare de coordonate.

2.3.3 Propoziţie. *Fie* $f = (f_1, ..., f_l) : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ *şi* $a \in A$*;* f *este continuă în* a *dacă şi numai dacă,* $\forall i \in \{1, ..., l\}$*,* f_i *este continuă în* a*.*

Demonstraţie. Demonstraţia este o consecinţă a definiţiei continuităţii şi a caracterizării convergenţei şirurilor dată în teorema 1.3.13.

Teorema următoare dă caracterizări pentru continuitate asemănătoare celor date pentru limita unei funcţii în teorema 2.2.4 şi în propoziţia 2.2.6.

2.3.4 Teoremă. *Fie* $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ *şi* $a \in A$*; următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

1). f *este continuă în* a*;*

2). $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ *a.î.* $\forall x \in A$ *cu* $\|x - a\| < \delta, \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$*;*

3). $\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \exists U \in \mathcal{V}(a)$ *a.î.* $\forall x \in A \cap U, f(x) \in V$*.*

Demonstraţie. (1).$\Longleftrightarrow$ 2).): Dacă $a \in A \cap A'$ afirmaţia este o consecinţă a punctului 2) din propoziţia 2.3.2 şi a teoremei 2.2.4 în care se dă caracterizarea $(\varepsilon - \delta)$ pentru limita unei funcţii într-un punct de acumulare.

Dacă a este punct izolat f este automat continuă; în mod asemănător condiţia 2) este automat îndeplinită deoarece există o vecinătate şi deci o sferă $S(a, \delta)$ a.î. $S(a, \delta) \cap A = \{a\}$ şi pentru orice $x \in S(a, \delta) \cap A, \|f(x) - f(a)\| = \|f(a) - f(a)\| = 0 < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$.

Condiţia 2). poate fi reformulată astfel: $\forall S(f(a), \varepsilon), \exists S(a, \delta)$ a.î. $\forall x \in S(a, \delta) \cap A, f(x) \in S(f(a), \varepsilon)$.

Ţinînd cont că familia sferelor cu centrul într-un punct formează un sistem fundamental de vecinătăţi pentru acel punct, 3). este echivalent cu 2). ■

Operaţii cu funcţii continue

Următoarea propoziţie este o consecinţă a propoziţiilor 2.2.11 şi 2.3.2.

2.3.5 Propoziţie. *Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ şi $a \in A$ a.î. f şi g sînt continue pe A; atunci:*

1). $f + g : A \to \mathbb{R}^l$ *este continuă pe* A,
2). $t \cdot f : A \to \mathbb{R}^l$ *este continuă pe* $A, \forall t \in \mathbb{R}$,
3). $(f, g) : A \to \mathbb{R}$ *este continuă pe* A,
4). $\|f\| : A \to \mathbb{R}$ *este continuă pe* A.
Dacă $l = 1$, *şi* $f(A) \subseteq \mathbb{R}^*$
5). $\dfrac{1}{f} : A \to \mathbb{R}$ *este continuă pe* A.

Propoziţia 2.2.12 are următoarea replică pentru continuitate:

2.3.6 Propoziţie. *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l, a \in A, g : B \subseteq \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m, b \in B$ şi $f(A) \subseteq B$.*

Dacă f este continuă în a şi g este continuă în b atunci $g \circ f$ este continuă în a.

Dacă f este continuă pe A şi g este continuă pe B atunci $g \circ f$ este continuă pe A.

Demonstraţia este o consecinţă imediată a definiţiei continuităţii.

În sfîrşit, avem pentru continuitate un rezultat asemănător propoziţiei 2.2.13 în care se precizează semnul local al unei funcţii cu limită; demonstraţia utilizează propoziţia 2.2.13 şi din nou propoziţia 2.3.2.

2.3.7 Propoziţie. *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $a \in A$ a.î. f este continuă în a; dacă $f(a) \neq 0$ atunci $\exists \delta > 0$ a.î. $\forall x \in S(a, \delta) \cap A, f(x) \cdot f(a) > 0$ (funcţia f are acelaşi semn cu $f(a)$ pe o vecinătate a punctului a).*

Proprietăţi ale funcţiilor continue pe mulţimi

În această secţiune vom prezenta cîteva rezultate deosebit de importante privind comportarea funcţiilor continue pe diverse tipuri de mulţimi.

2.3.8 Teoremă. *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$; dacă mulţimea A este compactă în $\mathbb{R}^k$ şi funcţia f este continuă pe A atunci mulţimea valorilor lui f, $f(A)$, este mulţime compactă în $\mathbb{R}^l$.*

Demonstraţie. Pentru a demonstra că mulţimea $f(A)$ este compactă în $\mathbb{R}^l$ trebuie să arătăm că $f(A)$ este mărginită şi închisă (vezi teorema de caracterizare 1.3.33).

Să presupunem prin reducere la absurd că $f(A)$ nu este mărginită; rezultă că putem alege, $\forall n \in \mathbb{N}$, un element $x^n \in A$ a.î. $\|f(x^n)\| \geq n$. Şirul $(x^n) \subseteq A$ admite un subşir (x^{l_n}) convergent la un element $x \in A$ (A este mulţime compactă). Deoarece f este continuă pe A, $f(x^{l_n}) \to f(a)$ şi deci şirul (f^{l_n}) este mărginit (propoziţia 1.3.14). Aceasta intră în contradicţie cu $\|f(x^{l_n})\| \geq l_n \geq n, \forall n \in \mathbb{N}$. Deci ipoteza că $f(A)$ este nemărginită conduce la o contradicţie.

Să arătăm acum că $f(A)$ este mulţime închisă. Vom utiliza pentru aceasta caracterizarea mulţimilor închise prezentată în teorema 1.3.28, punctul 3). Fie deci $(y^n) \subseteq f(A)$ un şir convergent la un element $y \in \mathbb{R}^l$; atunci există şirul $(x^n) \subseteq A$ a.î., $\forall n \in \mathbb{N}$, $y^n = f(x^n)$. Deoarece A este compactă şirul (x^n) admite un subşir (x^{l_n}) convergent la un element $x \in A$. Cum funcţia f este continuă în x, $\lim_n f(x^{l_n}) = f(x)$. Pe de altă parte, $f(x^{l_n}) = y^{l_n} \to y$. Unicitatea limitei unui şir convergent ne conduce la concluzia $y = f(x) \in f(A)$. Deci orice şir convergent din $f(A)$ are limita în $f(A)$ ceea ce înseamnă că $f(A)$ este mulţime închisă.

$f(A)$ fiind mulţime mărginită şi închisă este mulţime compactă în $\mathbb{R}^l$. ∎

Un corolar al acestei teoreme utilizează faptul că mulţimile compacte din $\mathbb{R}$ admit un cel mai mic şi un cel mai mare element (îşi ating marginile).

2.3.9 Corolar (teorema lui Weierstrass). *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$; dacă A este compactă în $\mathbb{R}^k$ şi f este continuă pe A atunci există două elemente $x_m, x_M \in A$ a.î. $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M), \forall x \in A$.*

2.3.10 Observaţie. În cazul $l > 1$ concluzia teoremei lui Weierstrass nu mai are loc; într-adevăr, aşa cum se poate uşor verifica, aplicaţia identică $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}^2$ este continuă peste tot. Sfera închisă $T((0,0),1) \subseteq \mathbb{R}^2$ (discul închis cu centrul în origine şi de rază 1 din plan) este o mulţime compactă (mărginită şi închisă) dar mulţimea $f(T((0,0),1)) = T((0,0),1)$ nu are un cel mai mic şi nici un cel mai mare element ($\inf T((0,0),1) = (-1,-1)$ iar $\sup T((0,0),1) = (1,1)$).

Ca şi funcţiile reale de o variabilă reală, funcţiile vectoriale de mai multe variabile continue pe mulţimi compacte sînt continue uniform. Să precizăm sensul acestei continuităţi uniforme.

2.3.11 Definiţie. *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$; spunem că funcţia f este uniform continuă pe A dacă, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ a.î. $\forall x, y \in A$ cu $\|x - y\| < \delta$, rezultă că $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.*

2.3.12 Observaţie. Să observăm că dacă o funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ este uniform continuă pe A:
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x \in A, \forall y \in A$ cu $\|x - y\| < \delta, \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \Longrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in A, \exists \delta_{\varepsilon,x} > 0$ a.î. $\forall y \in A$ cu $\|x - y\| < \delta, \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \Longleftrightarrow$
$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{\varepsilon,x} > 0$ a.î. $\forall y \in A$ cu $\|x - y\| < \delta, \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \Longleftrightarrow$
$\forall x \in A$, f este funcţie continuă în $x \Longleftrightarrow$
f este continuă pe mulţimea A.

Aşa cum se observă din cele de mai sus, alegerea lui δ este, în cazul funcţiilor uniform continue, independentă de $x \in A$ şi deci, pentru astfel de funcţii, continuitatea în fiecare punct x se scrie în mod uniform (cu acelaşi δ dependent doar de ε); de aici şi denumirea de uniformă continuitate.

Rezultă că orice funcţie uniform continuă pe o mulţime este continuă pe acea mulţime; reciproca acestei afirmaţii nu este adevărată nici pentru funcţiile reale de o variabilă reală şi cu atît mai mult ea nu va funcţiona pentru funcţiile de mai multe variabile.

Un exemplu remarcabil de funcţii uniform continue îl constituie funcţiile lipschitziene.

2.3.13 Definiţie. *O funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ este funcţie* **lipschitziană pe A** *(sau verifică condiţia lui Lipschitz pe mulţimea A) dacă există un număr $L > 0$ (constanta lui Lipschitz) a.î. $\|f(x) - f(y)\| \leq L \cdot \|x - y\|, \forall x, y \in A$.*

2.3.14 Propoziţie. *Orice lipschitziană pe o mulţime este uniform continuă pe acea mulţime.*

Demonstraţie. Într-adevăr, fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ o funcţie lipschitziană pe A cu constanta Lipschitz L; atunci $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{L} > 0$ a.î. $\forall x, y \in A$ cu $\|x - y\| < \delta, \|f(x) - f(y)\| \leq L \cdot \|x - y\| < L \cdot \dfrac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$. ∎

În propoziţia următoare dăm o carcaterizare secvenţială (cu ajutorul şirurilor) a uniformei continuităţi a unei aplicaţii.

2.3.15 Propoziţie. *O funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ este uniform continuă pe A dacă şi numai dacă oricare ar fi două şiruri $(x^n), (y^n) \subseteq A$ cu $x^n - y^n \to 0_{\mathbb{R}^k}$, $f(x^n) - f(y^n) \to 0_{\mathbb{R}^l}$ (primul 0 este elementul nul din $\mathbb{R}^k$ iar al doilea 0 elementul nul din spaţiul $\mathbb{R}^l$).*

Demonstraţie. ($\Longrightarrow$): Presupunem că f este uniform continuă şi fie două şiruri $(x^n), (y^n) \subseteq A$ cu $x^n - y^n \to 0_{\mathbb{R}^k}$; $\forall \varepsilon > 0$, din condiţia de uniformă continuitate, $\exists \delta > 0$ a.î. $\forall x, y \in A$ cu $\|x - y\| < \delta, \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. Deoarece $x^n - y^n \to 0_{\mathbb{R}^k}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0, \|x^n - y^n\| < \delta$ şi atunci $\|f(x^n) - f(y^n)\| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$. Aceasta antrenează $f(x^n) - f(y^n) \to 0_{\mathbb{R}^l}$.

($\Longleftarrow$) Să presupunem că, deşi condiţia secvenţială este îndeplinită, f nu este uniform continuă. Atunci există un număr $\varepsilon_0 > 0$ a.î., $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi deci pentru $\delta = \dfrac{1}{n}$ există $x^n, y^n \in A$ cu $\|x^n - y^n\| < \dfrac{1}{n}$ şi totuşi $\|f(x^n) - f(y^n)\| \geq \varepsilon_0$. Rezultă atunci că $x^n - y^n \to 0_{\mathbb{R}^k}$ şi $f(x^n) - f(y^n) \nrightarrow 0_{\mathbb{R}^l}$ ceea ce contrazice ipoteza făcută. ∎

Am observat că orice funcţie uniform continuă este continuă; în situaţia în care mulţimea de definiţie a funcţiei este compactă, are loc şi reciproca acestei condiţii.

2.3.16 Teoremă (teorema lui Cantor). *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^k$ o mulţime compactă şi $f : A \to \mathbb{R}^l$ o funcţie continuă pe A; atunci f este uniform continuă pe A.*

(!) **Demonstraţie**. Să presupunem prin reducere la absurd că f este continuă pe mulţimea compactă A dar că nu este uniform continuă; utilizînd caracterizarea secvenţială din propoziţia precedentă, există două şiruri $(x^n), (y^n) \subseteq A$ cu $x^n - y^n \to 0_{\mathbb{R}^k}$ dar $f(x^n) - f(y^n) \nrightarrow 0_{\mathbb{R}^l}$. Atunci $\exists \varepsilon_0 > 0$ şi există o mulţime infinită $N \subseteq \mathbb{N}$ a.î. $\|f(x^n) - f(y^n)\| \geq \varepsilon_0, \forall n \in N$.

Deoarece A este compactă, există o mulţime infinită $N_1 \subseteq N$ a.î. subşirul $(x^n)_{n \in N_1}$ să fie convergent la un element $x \in A$ şi există o submulţime infinită $N_2 \subseteq N_1$ a.î. subşirul $(y^n)_{n \in N_2}$ să conveargă la un element $y \in A$; atunci $(x^n)_{n \in N_2}$ converge la x (este un subşir al şirului $(x^n)_{n \in N_1}$).

Deoarece $(x^n - y^n)_{n \in N_2} \to 0_{\mathbb{R}^k}$ rezultă $x = y$. Funcţia f este continuă pe A şi deci este continuă în x; cum $(x^n)_{n \in N_2} \to x$ şi $(y^n)_{n \in N_2} \to x$, $(f(x^n) - f(y^n))_{n \in N_2} \to f(x) - f(x) = 0_{\mathbb{R}^l}$. Dar aceasta vine în contradicţie cu condiţia $\|f(x^n) - f(y^n)\| \geq \varepsilon_0, \forall n \in N_2$. Contradicţia obţinută arată că ipoteza că f nu este uniform continuă este falsă. ∎

Capitolul 2

Funcţii de mai multe variabile

2.3 Funcţii continue

Proprietăţi ale funcţiilor continue pe mulţimi

O altă proprietate remarcabilă a funcţiilor continue este aceea de a conserva conexiunea. Vom introduce întîi noţiunea de mulţime conexă prin arce în $\mathbb{R}^k$.

2.3.17 Definiţie. *Fie $x, y \in \mathbb{R}^k$; o funcţie $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}^k$, continuă pe segmentul $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, cu proprietatea că $\psi(a) = x$ şi $\psi(b) = y$ se numeşte* **drum** *sau* **arc** *ce uneşte x cu y. Mulţimea $G_\psi = \psi([a,b]) = \{\psi(t) \in \mathbb{R}^k : t \in [a,b]\}$ se numeşte* **graficul** *arcului ψ.*

2.3.18 Observaţie. În definiţia unui drum, intervalul $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ poate fi înlocuit cu oricare alt interval închis. De exemplu, dacă $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ este un drum ce uneşte punctele x şi y din $\mathbb{R}^k$ şi definim $\varphi : [0,1] \to [a,b]$ prin $\varphi(t) = (1-t) \cdot a + t \cdot b, \forall t \in [0,1]$ atunci $\psi \circ \varphi$ este de asemenea un drum ce uneşte x cu y şi care are acelaşi grafic ($G_\psi = G_{\psi \circ \varphi}$).

Mai exact, vom spune că două drumuri $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ şi $\theta : [c,d] \to \mathbb{R}^k$ sînt **echivalente** dacă există o funcţie surjectivă şi strict crescătoare $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ a.î. $\theta = \psi \circ \varphi$ (să observăm că o asemenea funcţie φ este o bijecţie continuă şi cu inversă continuă, deci este un homeomorfism). Este clar că dacă ψ uneşte punctul x cu y atunci θ are aceeaşi proprietate. Relaţia introdusă între drumuri este o relaţie de echivalenţă (reflexivă, simetrică şi tranzitivă). O clasă de echivalenţă în raport cu această relaţie se numeşte

curbă în $\mathbb{R}^k$. Astfel în definiţia de mai sus se poate înlocui drumul ψ cu orice alt drum echivalent.

2.3.19 Exemple. 1). $\psi : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, \psi(t) = (\cos t, \sin t), \forall t \in [0, \pi]$, este un arc plan ce uneşte punctul $(1, 0)$ cu $(-1, 0)$. Graficul acestui drum este un semicerc plasat pe cercul cu centrul în $(0, 0)$ şi de rază 1.

2). $\forall x, y \in \mathbb{R}^k, \psi : [0, 1] \to \mathbb{R}^k, \psi(t) = (1 - t) \cdot x + t \cdot y, \forall t \in [0, 1]$, este un drum ce uneşte punctele x şi y; graficul său este segmentul $[x, y]$.

2.3.20 Definiţie. *O mulţime $A \subseteq \mathbb{R}^k$ se numeşte mulţime* **conexă prin arce** *dacă pentru orice două puncte $x, y \in A$ există un drum ψ care uneşte x cu y a.î. $G_\psi \subseteq A$.*

O mulţime deschisă şi conexă prin arce se numeşte **domeniu**.

$A \subseteq \mathbb{R}^k$ se numeşte mulţime **convexă** *dacă pentru orice două puncte $x, y \in A$ segmentul $[x, y] \subseteq A$.*

2.3.21 Observaţii. 1). Intuitiv o mulţime conexă prin arce este o mulţime formată "dintr-o singură bucată".

2). Aşa cum am observat în exemplul de mai sus, un segment $[x, y] \subseteq \mathbb{R}^k$ este graficul unui drum ψ; rezultă de aici că orice mulţime convexă este conexă prin arce.

3). Singurele mulţimi conexe prin arce în $\mathbb{R}$ sînt intervalele. Într-adevăr, fie $A \subseteq \mathbb{R}$ conexă prin arce şi fie x, y două puncte arbitrare în A şi z a.î. $x < z < y$. Deoarece A este conexă prin arce există un drum, deci o funcţie continuă $\psi : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care uneşte x cu y şi al cărei grafic, G_ψ, este inclus în A. Atunci $\psi(a) = x < z < y = \psi(b)$ şi, deoarece aplicaţia ψ are proprietatea lui Darboux, există $c \in [a, b]$ a.î. $\psi(c) = z$. Însă, cum $\psi(c) \in G_\psi \subseteq A$, rezultă că $z \in A$. Astfel, mulţimea A, odată cu două puncte, conţine şi orice punct aflat între ele; deci A este interval.

Deoarece intervalele sînt mulţimi convexe rezultă că, în $\mathbb{R}$, mulţimile conexe prin arce coincid cu mulţimile convexe.

În general însă, pentru $k > 1$, reciproca nu este adevărată după cum putem uşor remarca din exemplele următoare.

2.3.22 Exemple. 1). Orice sferă deschisă sau închisă din $\mathbb{R}^k$ este mulţime convexă (şi deci conexă prin arce). Într-adevăr, fie $S(x, r) \subseteq \mathbb{R}^k$ o sferă deschisă cu centrul în x şi de rază r; $\forall u, v \in S(x, r)$ vom demonstra că $[u, v] \subseteq S(x, r)$. $\forall w \in [u, v], \exists t \in [0, 1]$ a.î. $w = (1 - t) \cdot u + t \cdot v$. Atunci

$\|w-x\| = \|((1-t)\cdot u+t\cdot v)-((1-t)\cdot x+t\cdot x)\| = \|(1-t)\cdot(u-x)+t\cdot(v-x)\| \leq (1-t)\cdot\|u-x\|+t\cdot\|v-x\| < (1-t)\cdot r+t\cdot r = r$ de unde $w \in S(x,r)$.

2). Un cerc din $\mathbb{R}^2$ este o mulţime conexă prin arce care nu este convexă. Într-adevăr, fie $C(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y-x\| = r\}; \forall u, v \in C(x,r), \exists \alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ a.î. $u = x + (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ şi $v = x + (r\cos\beta, r\sin\beta)$; vom presupune că $\alpha \leq \beta$. Atunci aplicaţia $\psi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2$ definită prin $\psi(t) = x + (r\cos t, r\sin t), \forall t \in [\alpha,\beta]$ este un drum ce uneşte u şi v şi $G_\psi \subseteq C(x,r)$. Este evident că, pentru $u \neq v$, $[u,v] \not\subseteq C(x,r)$.

3). Graficul oricărui drum din $\mathbb{R}^k$ este o mulţime conexă prin arce. Într-adevăr, fie $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ un drum în $\mathbb{R}^k$ şi fie $G_\psi = \{\psi(t) : t \in [a,b]\}$ graficul acestui drum. Oricare ar fi $x, y \in G_\psi, \exists c, d \in [a,b]$ a.î. $x = \psi(c), y = \psi(d)$. Atunci aplicaţia $\phi : [c,d] \to \mathbb{R}^k$ definită prin $\phi(t) = \psi(t), \forall t \in [c,d]$ (restricţia funcţiei ψ la intervalul $[c,d]$) este un drum care uneşte x cu y şi al cărui grafic este conţinut în G_ψ.

4). Fie x şi y două puncte distincte din $\mathbb{R}^k$; mulţimea formată din cele două puncte $A = \{x, y\}$ nu este conexă prin arce.

5). Vom prezenta acum o mulţime ceva mai complicată care nu este conexă prin arce.

Fie $A = \{(x, \sin\frac{1}{x}) : x \in (0,1]\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Atunci A este conexă prin arce dar $\bar{A}$ nu este conexă prin arce.

Fie $u = (x, \sin\frac{1}{x}), v = (y, sin\frac{1}{y}) \in A$ şi să presupunem că $x < y$; atunci aplicaţia $\psi : [x,y] \to A$ definită prin $\psi(t) = (t, \sin\frac{1}{t}), \forall t \in [x,y]$, este continuă, are graficul în A şi $\psi(x) = u, \psi(y) = v$ deci este un arc ce uneşte u cu v. Rezultă că A este conexă prin arce.

Să notăm cu $B = \{0\} \times [-1,1]$; se poate uşor constata că $\bar{A} = B \cup A$. Să presupunem că $\bar{A}$ este conexă prin arce; atunci există o funcţie continuă $\varphi : [0,1] \to \bar{A}$ a.î. $\varphi(0) = (0,1)$ şi $\varphi(1) = (1, \sin 1)$ (un arc ce uneşte punctele $(0,1)$ şi $(1,\sin 1)$ din mulţimea $\bar{A}$). Fie $u : [0,1] \to \mathbb{R}, v : [0,1] \to \mathbb{R}$ funcţiile de coordonate ale lui φ; atunci u şi v sînt continue pe $[0,1]$. Mulţimea B este închisă în $\mathbb{R}^2$ şi atunci $\varphi^{-1}(B)$ este închisă şi mărginită în $[0,1]$ deci este compactă; fie atunci $t_0 = \sup\varphi^{-1}(B) \in \varphi^{-1}(B)$. Rezultă că $u(t_0) = 0, v(t_0) \in [-1,1]$ şi $\forall t > t_0, \varphi(t) \in A$ de unde $u(t) > 0$ şi $v(t) = \sin\left(\dfrac{1}{u(t)}\right)$.

Considerăm un şir arbitrar $(x_n) \downarrow 0$; atunci, cum $\forall n \in \mathbb{N}^*, u(t_0 + \frac{1}{n}) > 0$, există un şir strict crescător $(k_n) \uparrow +\infty$ a.î. $0 = u(t_0) < x_{k_n} < u(t_0 + \frac{1}{n})$. Funcţia u fiind continuă are proprietatea lui Darboux şi deci există, $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n \in (t_0, t_0 + \frac{1}{n})$ a.î. $u(t_n) = x_{k_n}$. Atunci $t_n \to t_0$ şi deci $u(t_n) \to$

$u(t_0) = 0$ iar $v(t_n) \to v(t_0)$. Dacă alegem de exemplu $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ atunci $v(t_n) = \sin\left(\dfrac{1}{u(t_n)}\right) = \sin(k_n\pi) = 0$ şi deci $v(t_0) = 0$; pe de altă parte dacă $x_n = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$ atunci $v(t_n) = \sin\left(\dfrac{(4k_n+1)\pi}{2}\right) = 1$ de unde $v(t_0) = 1$ ceea ce reprezintă o contradicţie. Deci $\bar{A}$ nu este conexă prin arce.

2.3.23 Teoremă. *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$; dacă mulţimea A este conexă prin arce şi funcţia f este continuă pe A atunci mulţimea valorilor lui f, $f(A)$, este conexă prin arce în $\mathbb{R}^l$.*

Demonstraţie. Fie $u, v \in f(A)$ două puncte arbitrare şi fie $x, y \in A$ a.î. $u = f(x)$ şi $v = f(y)$. Deoarece A este conexă prin arce, există o funcţie continuă $\psi : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ a.î. $G_\psi \subseteq A$ şi $\psi(a) = x, \psi(b) = y$. Atunci $f \circ \psi : [a, b] \to \mathbb{R}^l$ este funcţie continuă (compunerea a două funcţii continue este funcţie continuă - propoziţia 2.3.6), $u = f(x) = f(\psi(a)) = (f \circ \psi)(a), v = f(y) = f(\psi(b)) = (f \circ \psi)(b)$ şi $G_{f\circ\psi} = (f \circ \psi)([a, b]) = f(\psi([a, b]) \subseteq f(A)$; deci $f \circ \psi$ este un arc ce uneşte u cu v şi a cărui grafic este inclus în $f(A)$.■

2.3.24 Observaţie. Trebuie să remarcăm aici că imaginea printr-o funcţie continuă a unei mulţimi convexe este mulţime conexă prin arce dar nu este, în mod obligator, convexă. De exemplu, la 2.3.19 punctul 1), funcţia ψ duce mulţimea convexă $[0, \pi]$ în semicercul $\psi([0, \pi])$ care nu este mulţime convexă. În general un drum este o funcţie continuă pe o mulţime convexă (un interval închis în $\mathbb{R}$) a cărui imagine, graficul drumului, nu este în mod obligatoriu convexă. Conexiunea prin arce este o proprietate topologică (legată de structura topologică a spaţiului) pe cînd convexitatea este legată de structura algebrică de spaţiu liniar. În cazul particular al mulţimii $\mathbb{R}$ mulţimile conexe prin arce coincid cu mulţimile convexe ale lui $\mathbb{R}$ care sînt intervalele.

Vom prezenta în finalul acestei secţiuni o aplicaţie interesantă a teoremei de mai sus.

Fie $C = C(x, r) = \{y : \|y - x\| = r\} \subseteq \mathbb{R}^2$ un cerc cu centrul în x şi de rază r din $\mathbb{R}^2$; aplicaţia $s : C \to C$ definită prin $s(y) = 2x - y, \forall y \in C$ asociază fiecărui punct de pe cercul C punctul să diametral opus; este evident că s este funcţie continuă şi că $s \circ s$ este aplicaţia identică pe C.

2.3.25 ! **Teoremă**. *Dacă $f : C \to \mathbb{R}$ este o funcţie reală continuă atunci există $y \in C$ a.î. $f(y) = f(s(y))$ (deci există două puncte diametral opuse în care f ia aceeaşi valoare).*

Demonstraţie. Definim funcţia $g : C \to \mathbb{R}$ prin $g(y) = f(y) - f(s(y)), \forall y \in C$; se observă că g este o funcţie continuă. Cum C este mulţime conexă prin arce (exemplul 2.3.22, punctul 2)), teorema 2.3.23 ne asigură că $g(C)$ este conexă prin arce în $\mathbb{R}$ deci este convexă şi deci este un interval. Fie acum $y^0 \in C$; dacă $g(y^0) = 0$ rezultă că $f(y^0) = f(s(y^0))$. Dacă $g(y^0) \neq 0$, $g(s(y^0)) = f(s(y^0)) - f(s(s(y^0))) = f(s(y^0)) - f(y^0) = -g(y^0)$; atunci $g(y^0)$ şi $-g(y^0)$ aparţin intervalului $g(C)$ şi au semne contrare. Rezultă că $0 \in g(C)$ şi deci există $z^0 \in C$ a.î. $f(z^0) = f(s(z^0))$. ∎

2.3.26 ⓘ **Observaţii**. 1). Dacă imaginăm un meridian (sau o paralelă) a globului pămîntesc ca un cerc şi considerăm funcţia care dă temperatura la un moment dat în fiecare punct al acestui meridian atunci este plauzibilă ipoteza că această funcţie este continuă. Consecinţa acestei ipoteze este că există în fiecare moment pe fiecare meridian (ca şi pe fiecare paralelă) două puncte diametral opuse cu aceeaşi temperatură.

2). Rezultatul stabilit în teorema precedentă este o variantă simplă a teoremei lui Borsuk-Ulam care afirmă că pentru orice funcţie continuă definită pe $C(x,r) = \{y : \|y - x\| = r\} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ există două puncte diametral opuse în care f ia aceeaşi valoare.

2.4 Aplicaţii liniare

În această secţiune vom studia o clasă particulară de aplicaţii continue, aplicaţiile liniare.

2.4.1 Definiţie. *O funcţie $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ se numeşte* **aplicaţie liniară** *sau* **operator liniar** *dacă conservă structura de spaţiu liniar, adică dacă verifică condiţiile:*

1). $T(x + y) = T(x) + T(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^k$,

2). $T(t \cdot x) = t \cdot T(x), \forall x \in \mathbb{R}^k, \forall t \in \mathbb{R}$.

2.4.2 Lemă. *Fie $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l, T = (T_1, ..., T_l)$ o aplicaţie liniară; atunci:*

1). $T(0) = 0$;

2). $T(x - y) = T(x) - T(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^k$;

3). $\forall j \in \{1, ..., l\}$, funcţiile de coordonate $T_j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ sînt aplicaţii liniare.

Demonstraţie. 1). $T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0)$ de unde $T(0) = 0$.

2). $T(x-y) = T(x+(-1)\cdot y) = T(x)+T((-1)\cdot y) = T(x)+(-1)T(y) = T(x) - T(y)$.

3). $\forall x, y \in \mathbb{R}^k$, relaţia $T(x+y) = T(x) + T(y)$ scrisă pe componente conduce la $(T_1(x+y), ..., T_l(x+y)) = (T_1(x) + T_1(y), ..., T_l(x) + T_l(y))$ de unde rezultă că $T_j(x+y) = T_j(x) + T_j(y), \forall j \in \{1, ..., l\}$. La fel se arată că $T_j(tx) = tT_j(x), \forall j \in \{1, ..., l\}$. ∎

Fie $\{e_1, ..., e_k\}$ baza canonică a spaţiului $\mathbb{R}^k$ şi $\{f_1, ..., f_l\}$ baza canonică a lui $\mathbb{R}^l$; reamintim că $\forall i \in \{1, ..., k\}, e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ unde cifra 1 apare pe locul i iar, $\forall j \in \{1, ..., l\}, f_j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ unde cifra 1 apare pe locul j.

Dacă $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ este o aplicaţie liniară atunci, $\forall x = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$,

$$T(x) = T\left(\sum_{i=1}^{k} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{k} x_i T(e_i). \tag{1}$$

$\forall i \in \{1, ..., k\}$, $T(e_i) \in \mathbb{R}^l$ şi deci $T(e_i) = \sum_{j=1}^{l} a_j^i \cdot f_j$.

Vom nota cu $A_T = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^k \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^k \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_l^1 & a_l^2 & \cdots & a_l^k \end{pmatrix}_{l\times k}$ matricea cu l linii şi k coloane formată cu elementele a_j^i şi o vom numi **matricea asociată** aplicaţiei liniare T; observăm că această matrice nu depinde decît de aplicaţia T.

Revenind în relaţia (1) obţinem

$$T(x) = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l} a_j^i x_i f_j\right) = \sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{k} a_j^i x_i\right) f_j. \tag{2}$$

Să notăm cu $T_1, ..., T_l$ funcţiile scalare de coordonate ale aplicaţiei T; atunci din (2),

$$T_j(x) = \sum_{i=1}^{k} a_j^i \cdot x_i, \forall j \in \{1, ..., l\}, \tag{3}$$

de unde, dacă scriem elementele din $\mathbb{R}^k$ şi pe cele din $\mathbb{R}^l$ uni-colonar, obţinem:

$$T(x) = \begin{pmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \\ \vdots \\ T_l(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k a_1^i x_i \\ \sum_{i=1}^k a_2^i x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^k a_l^i x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^k \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_2^k \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_l^1 & a_l^2 & \dots & a_l^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

şi deci ajungem la formula de reprezentare a aplicaţiei liniare T:

$$T(x) = A_T \cdot x, \forall x \in \mathbb{R}^k.$$

Reciproc, orice aplicaţie $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ definită prin $T(x) = A \cdot x, \forall x \in \mathbb{R}^k$, unde A este o matrice de tip $l \times k$, este o aplicaţie liniară.

2.4.3 Exemple. 1). Orice aplicaţie liniară $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este de forma $T(x) = a \cdot x, \forall x \in \mathbb{R}$ unde $a \in \mathbb{R}$ este un număr fixat. Matricea asociată lui T este o matrice de tip 1×1 avînd ca singur element pe a.

2). Aplicaţiile liniare scalare $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ sînt de forma $T(x) = a_1 \cdot x_1 + ... + a_k \cdot x_k, \forall x = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ unde $A_T = (a_1, ..., a_k)_{1\times k}$ este matricea asociată. Observăm că în cazul particular $k = 2$, $T^{-1}(0_{\mathbb{R}}) = \{x = (x_1, x_2) : a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 = 0\}$ este o dreaptă care trece prin origine. În cazul $k = 3$, $T^{-1}(0_{\mathbb{R}})$ reprezintă un plan care trece prin $(0, 0, 0)$.

2.4.4 Propoziţie. *Orice aplicaţie liniară $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ este funcţie lipschitziană deci este funcţie uniform continuă şi deci continuă.*

Demonstraţie. Vom utiliza notaţiile din relaţia (1) de mai sus; $\forall x \in \mathbb{R}^k$,

$$\|T(x)\| = \|\sum_{i=1}^k x_i \cdot T(e_i)\| \le \sum_{i=1}^k \|T(e_i)\| \cdot |x_i| \le \sum_{i=1}^k \|T(e_i)\| \cdot \|x\|.$$

Dacă notăm $L = \sum_{i=1}^k \|T(e_i)\|$ obţinem $\|T(x)\| \le L \cdot \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^k$. Atunci, $\forall x, y \in \mathbb{R}^k, \|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \le L \cdot \|x - y\|$, ceea ce arată că T este funcţie lipschitziană. ■

În teorema următoare prezentăm comportarea aplicaţiilor liniare faţă de operaţiile uzuale.

2.4.5 Teoremă. *1). Fie* $T, S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ *două operaţii liniare; atunci:*
a). $T + S$ *este operaţie liniară şi* $A_{T+S} = A_T + A_S$.
b). $t \cdot T$ *este operaţie liniară,* $\forall t \in \mathbb{R}$ *şi* $A_{t \cdot T} = t \cdot A_T$.
2). Fie $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ *şi* $S : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ *două operaţii liniare; atunci* $S \circ T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ *este operaţie liniară şi* $A_{S \circ T} = A_s \cdot A_T$.

Demonstraţie. 1). Este uşor de verificat că adunarea şi înmulţirea cu scalari păstrează liniaritatea operaţiilor. Să ne ocupăm de matricile asociate.
$\forall x \in \mathbb{R}^k, (T + S)(x) = T(x) + S(x) = A_T \cdot x + A_S \cdot x = (A_T + A_S) \cdot x$; pe de altă parte, $(T + S)(x) = A_{T+S} \cdot x$ de unde $A_{T+S} = A_T + A_S$.
La fel demonstrăm şi b).
2). Se arată imediat că $S \circ T$ este operaţie liniară de la $\mathbb{R}^k$ la $\mathbb{R}^m$.
$\forall x \in \mathbb{R}^k, (S \circ T)(x) = S(T(x)) = A_S \cdot T(x) = A_S \cdot A_T \cdot x$; pe de altă parte, $(S \circ T)(x) = A_{S \circ T} \cdot x$ de unde rezultă că $A_{S \circ T} = A_S \cdot A_T$. ∎

Capitolul 3

Diferenţiabilitatea funcţiilor de mai multe variabile

3.1 Derivata după o direcţie

Reamintim că dacă $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in \mathring{A}$ atunci f este derivabilă în a dacă există şi este finită limita: $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+t) - f(a)}{t}$; această limită se notează cu $f'(a)$ şi se numeşte derivata funcţiei f în punctul interior a.

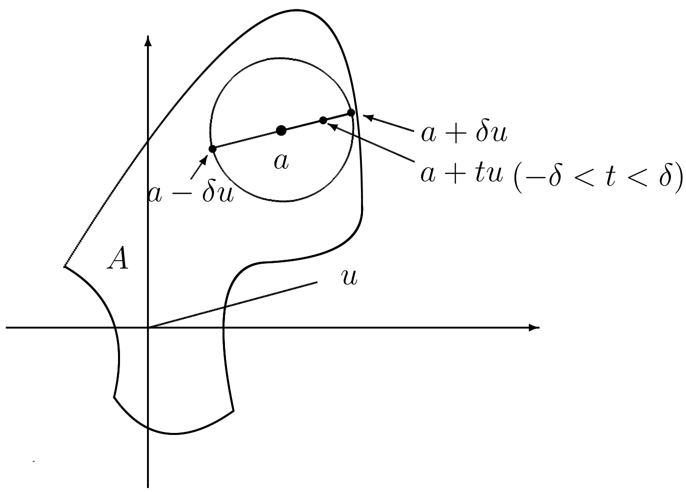
În cazul funcţiilor de mai multe variabile această definiţie nu poate fi adaptată fără anumite precauţii.

Să ne imaginăm interiorul unei camere ca pe o mulţime din $\mathbb{R}^3$ în care avem plasată o sursă de căldură. Ne punem problema studierii variaţiei temperaturii în punctele interioare. Este evident că apropierea de sursa de căldură va fi marcată de o creştere a temperaturii iar depărtarea de această sursă va însemna o scădere a temperaturii deci că variaţia de temperatură depinde de direcţia pe care ne deplasăm.

Să observăm întîi că, dacă $a \in \mathbb{R}^k$ şi $u \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, atunci dreapta care trece prin a şi are direcţia u este dreapta care trece prin punctele a şi $a+u$; această dreaptă este deci $(a, a+u) = \{(1-t)\cdot a + t\cdot(a+u) : t \in \mathbb{R}\} = \{a + t\cdot u : t \in \mathbb{R}\}$.

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ şi $a \in \mathring{A}$; oricare ar fi un vector $u \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, cum $a \in \mathring{A}, \exists \delta > 0$ a.î. $a + tu \in A, \forall t \in \mathbb{R}$ cu $|t| < \delta$. Într-adevăr fie $r > 0$ a.î. $S(a, r) \subseteq A$ şi fie t a.î. $\|a + tu - a\| = |t| \cdot \|u\| < r$; atunci numărul $\delta = \dfrac{r}{\|u\|}$

verifică cerinţa de mai sus.



Putem deci defini funcţia $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(a + tu), \forall t \in (-\delta, \delta)$; funcţia g este restricţia funcţiei f la un segment de pe dreapta ce trece prin a şi are direcţia u. Vom spune că f are derivată în a după direcţia u dacă g are derivată în origine. Mai precis:

3.1.1 Definiţie. *Fie* $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, a \in \mathring{A}$ *şi* $u \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$; *dacă există* $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+tu) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}$ *atunci spunem că funcţia* f *are* **derivată în a pe direcţia u** *şi notăm*

$$\frac{df}{du}(a) = f'_u(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}.$$

3.1.2 Observaţii. (i). $\dfrac{df}{du}(a) = g'(0)$.

(ii). Fie $v = \frac{1}{\|u\|} \cdot u$ versorul asociat direcţiei u; atunci

$$\frac{df}{du}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + \frac{t}{\|u\|} \cdot u) - f(a)}{\frac{t}{\|u\|}} = \|u\| \cdot \frac{df}{dv}(a).$$

3.1.3 Exemple. 1). Fie $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ un operator liniar; $\forall a \in \mathbb{R}^k, \forall u \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$,

$$\frac{dT}{du}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{T(a+tu) - T(a)}{t} = T(u).$$

Rezultă că un operator liniar are derivată în orice punct şi după orice direcţie. Această derivată nu depinde de punctul a ci numai de direcţia u.

2). Fie $\|\cdot\| : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ aplicaţia normă pe $\mathbb{R}^k$ şi fie $a, u \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$;

$$\frac{d\|\cdot\|}{du}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{\|a+tu\| - \|a\|}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(a+tu, a+tu)^{\frac{1}{2}} - (a,a)^{\frac{1}{2}}}{t} =$$

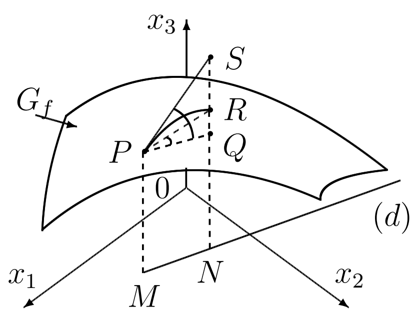
$$= \lim_{t\to 0} \frac{(a+tu, a+tu) - (a,a)}{t(\|a+tu\| + \|a\|)} = \frac{(a,u)}{\|a\|}.$$

Pentru $a = 0$, $\dfrac{d\|\cdot\|}{du}(0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{|t|}{t}$ şi această limită nu există. Deci $\|\cdot\|$ nu are derivată în origine pe nici-o direcţie.

Vom prezenta acum o interpretare geometrică a derivatei după o direcţie.

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a = (a_1, a_2) \in \mathring{A}$ şi $u = (u_1, u_2)$ un versor din $\mathbb{R}^2$; presupunem că funcţia f are derivata $\dfrac{df}{du}(a)$ în a după direcţia u.

În planul $x_1 0 x_2$ considerăm semidreapta $(d) : x = a + tu, t > 0$ care trece prin punctul a şi are direcţia u. Fie $M = (a_1, a_2, 0)$ originea acestei semidrepte şi fie $N = (a_1 + tu_1, a_2 + tu_2, 0)$ un punct pe această semidreaptă. Aşa cum se observă din figura următoare, punctele $P = (a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ şi $R = (a_1 + tu_1, a_2 + tu_2, f(a_1 + tu_1, a_2 + tu_2))$ aparţin graficului funcţiei f, $G_f = \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) : (x_1, x_2) \in A\}$.



Fie $(\pi) : \dfrac{x_1 - a_1}{u_1} = \dfrac{x_2 - a_2}{u_2}$ planul care conţine semidreapta (d) şi este perpendicular pe planul $x_1 0 x_2$. Planul (π), care în figura noastră conţine punctele P şi R, decupează în pînza G_f arcul de curbă $PR = G_f \cap (\pi)$. Fie $Q = (a_1 + tu_1, a_2 + tu_2, f(a_1, a_2))$ proiecţia lui P pe dreapta NR. În triunghiul PQR, dreptunghic în Q, vom nota cu α_t măsura unghiului $\widehat{QPR}$; atunci $\mathrm{tg}\alpha_t = \dfrac{RQ}{PQ} = \dfrac{f(a_1 + tu_1, a_2 + tu_2) - f(a_1, a_2)}{t} = \dfrac{f(a + tu) - f(a)}{t}$.

Trecînd la limită după $t \to 0$, rezultă că există $\lim_{t\to 0} \alpha_t = \alpha_0$ şi că, la limită, coarda PR tinde la tangenta în P la arcul de curbă $G_f \cap (\pi)$, tangentă care în figura de mai sus este notată cu PS. Atunci $\mathrm{tg}\alpha_0 = \dfrac{df}{du}(a)$.

Deci, în cazul particular în care u este un versor, derivata unei funcţii într-un punct după direcţia u este tangenta trigonometrică a unghiului făcut de tangenta geometrică în punct la curba $G_f \cap (\pi)$ cu planul $x_1 0 x_2$.

Ecuaţia acestei tangente la curbă este ecuaţia parametrică a unei drepte ce trece prin punctul P şi are direcţia dată de vectorul $(tu_1, tu_2, SQ) = (tu_1, tu_2, PQ \cdot \mathrm{tg}\alpha_0) = \left(tu_1, tu_2, t \cdot \dfrac{df}{du}(a)\right) \in \mathbb{R}^3$ ceea ce este echivalent cu direcţia dată de vectorul $v = \left(u_1, u_2, \dfrac{df}{du}(a)\right)$.

Atunci ecuaţia parametrică a tangentei în P la arcul de curbă decupat de (π) în G_f va fi:

$$x = (a, f(a)) + t\left(u, \frac{df}{du}(a)\right) = (a_1, a_2, f(a_1, a_2)) + t\left(u_1, u_2, \frac{df}{du}(a)\right)$$

sau, dacă scriem pe coordonate:

$$(T_u) \qquad \begin{cases} x_1 = a_1 + tu_1 \\ x_2 = a_2 + tu_2 \\ x_3 = f(a_1, a_2) + t\dfrac{df}{du}(a) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3.1.4 Propoziţie. *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, a \in \mathring{A}$ aşa fel încît f are derivată în a după orice direcţie $u \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$; atunci operatorul $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definit prin*

$$T(u) = \begin{cases} \dfrac{df}{du}(a) & , \text{ dacă } u \neq 0, \\ 0 & , \text{ dacă } u = 0, \end{cases}$$

este un operator omogen, adică satisface proprietatea:

$$T(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot T(u), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}^k.$$

Demonstraţie. Dacă $\lambda = 0$ sau dacă $u = 0$ condiţia de omogenitate este evident îndeplinită.

Fie acum $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, u \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$,

$$T(\lambda \cdot u) = \frac{df}{d(\lambda \cdot u)}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + t\lambda \cdot u) - f(a)}{t} =$$

$$= \lambda \cdot \lim_{t\to 0} \frac{f(a + t\lambda \cdot u) - f(a)}{t\lambda} = \lambda \cdot T(u).$$

3.1.5 Observaţie. În general, aşa cum vom remarca în exemplul 3.1.6, acest operator nu este aditiv şi astfel nu este un operator liniar. Acest fapt se poate interpreta geometric în cazul $k = 2$ în felul următor: deşi există tangente la curbele $G_f \cap \pi_u$ în $(a, f(a))$ pe toate direcţiile $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ aceste tangente nu sînt plasate într-un acelaşi plan şi deci nu există un plan tangent la graficul lui f în punctul $(a, f(a))$.

Cazul particular în care operatorul T este liniar (caz în care vom avea şi un plan tangent la graficul funcţiei) joacă un rol deosebit în teoria diferenţială a funcţiilor de mai multe variabile; acest caz va fi tratat în paragraful următor.

3.1.6 Exemplu. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & , (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Dacă $(x_k) \subseteq \mathbb{R}$ este un şir de numere reale strict pozitive convergent la 0 şi $\lambda > 0$, şirul $((x_k, \sqrt{\lambda x_k}))_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$ este convergent la $(0, 0)$ iar $f(x_k, \sqrt{\lambda x_k}) \to \dfrac{\lambda}{1 + \lambda^2}$. Cum limita şirului valorilor depinde de parametru real λ rezultă că funcţia f nu are limită în $(0, 0)$ şi deci nu este continuă în acest punct.

Pe de altă parte, $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\dfrac{df}{d(u, v)}(0, 0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(t(u, v))}{t} =$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{tu \cdot t^2v^2}{(t^2u^2 + t^4v^4)t} = \begin{cases} \dfrac{v^2}{u} & , u \neq 0, \\ 0 & , u = 0. \end{cases}$$

Deci există derivata în origine a lui f pe orice direcţie $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ fără ca f să fie continuă în $(0, 0)$.

Graficul funcţiei f are tangentă în $(0, 0, 0)$ pe orice direcţie $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; ecuaţiile parametrice ale acesteia sînt:

$$\begin{cases} x = tu \\ y = tv \\ z = t\frac{v^2}{u} \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad \text{dacă } u \neq 0 \text{ şi } \begin{cases} x = tu \\ y = tv \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad \text{dacă } u = 0, v \neq 0.$$

Operatorul T nu este liniar; într-adevăr $T((1, 0)) + T((0, 1)) = 0 \neq 1 = T((1, 1)) = T((1, 0) + (0, 1))$. Evident că tangentele ale căror ecuaţii le-am scris mai sus nu sînt plasate în acelaşi plan.

3.1.7 Teoremă (teorema de medie). *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă şi fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie care admite derivată în orice punct din A pe orice direcţie. Oricare ar fi $a, b \in A$ cu proprietatea că segmentul închis $[a, b] \subseteq A$ există $c \in [a, b]$ aşa fel încît:*

$$f(b) - f(a) = \frac{df}{d(b-a)}(c).$$

Demonstraţie. Fie deci $a, b \in A$ cu proprietatea că $[a, b] \subseteq A$ şi fie funcţia reală de o variabilă reală $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definită prin $g(t) = f(a + t(b - a)), \forall t \in [0, 1]$; atunci g este derivabilă pe $[0, 1]$. Într-adevăr, $x^0 = a + t_0(b - a) \in [a, b] \subseteq A, \forall t_0 \in [0, 1]$, şi deci f are derivată în x^0 pe direcţia $b - a$. Atunci $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(a + t(b - a)) - f(a + t_0(b - a))}{t - t_0} =$
$= \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(a + t_0(b - a) + (t - t_0)(b - a)) - f(a + t_0(b - a))}{t - t_0} =$
$= \lim\limits_{s \to 0} \dfrac{f(x^0 + s(b - a)) - f(x^0)}{s} = \dfrac{df}{d(b-a)}(x^0)$. Rezultă că g este derivabilă în orice punct $t \in [0, 1]$ şi $g'(t) = \dfrac{df}{d(b-a)}(a + t(b - a))$. Putem deci să aplicăm funcţiei g teorema creşterilor finite a lui Lagrange. Există atunci un punct $\theta \in [0, 1]$ a.î. $g(1) - g(0) = g'(\theta)$. Fie $c = a + \theta(b - a) \in [a, b]$; atunci, înlocuind în formula de mai sus pe g, obţinem $f(b) - f(a) = \dfrac{df}{d(b-a)}(c)$. ∎

3.1.8 Corolar. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă şi convexă; o funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ care are derivata nulă în orice punct din A şi pe orice direcţie este constantă pe A.*

Demonstraţie. Într-adevăr, A fiind convexă, odată cu orice două puncte $a, b \in A, [a, b] \subseteq A$; rezultă din teorema precedentă că $f(a) = f(b)$. ∎

Un rol important în studiul derivatelor unei funcţii îl joacă derivatele după direcţiile particulare date de vectorii bazei canonice.

3.1.9 Definiţie. *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ şi fie $a \in \mathring{A}$; $\forall i \in \{1, ..., k\}$ fie $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ unde cifra 1 este plasată pe locul i. Dacă funcţia f admite derivată în punctul a pe direcţia e_i atunci aceasta se numeşte* **derivata parţială** *a funcţiei f în raport cu x_i şi se notează:*

$$\frac{df}{de_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_{x_i}(a).$$

3.1.10 Observaţii. 1). Presupunem că $a = (a_1, ..., a_k) \in \mathring{A}$; atunci
$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, ..., a_k) - f(a_1, ..., a_i, ..., a_k)}{t} =$
$= \lim\limits_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_k) - f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_k)}{x_i - a_i}.$
Rezultă că derivata parţială în raport cu x_i se obţine ca o derivată obişnuită a funcţiei f în care fixăm celelalte variabile şi derivăm numai după x_i.

2). În cazul particular $k = 2$ variabila curentă se notează cu (x, y) şi atunci vom obţine două derivate parţiale ale unei funcţii: $\frac{\partial f}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}$.
În cazul $k = 3$ avem trei derivate parţiale notate cu $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ şi respectiv $\frac{\partial f}{\partial z}$.

3.1.11 Definiţie. *Să presupunem că $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ admite derivată parţială în raport cu o variabilă x_i în toate punctele interioare ale lui A; dacă funcţia $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathring{A} \to \mathbb{R}$ admite derivată parţială în raport cu variabila x_j în punctul $a \in \mathring{A}$ atunci $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ se numeşte derivată parţială de ordin doi. Această derivată se numeşte mixtă dacă $i \neq j$. În cazul $i = j$ ea se notează cu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.*

3.1.12 Observaţii. 1). Trebuie să atragem atenţia asupra scrierii derivatelor parţiale mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$; ordinea de la numitor $\partial x_j \partial x_i$ înseamnă că prima derivare s-a făcut după x_i iar a doua după x_j. Este important de reţinut că, în general, derivatele mixte nu sînt egale: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Astfel o funcţie de k variabile poate avea k^2 derivate parţiale de ordin doi.

2). În cazul $k = 2$ putem avea următoarele derivate parţiale de ordin doi:
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

În cazul $k = 3$ avem derivatele de ordin doi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \text{ şi } \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Aşa cum vom remarca în exemplul următor, o funcţie care are derivată într-un punct după toate direcţiile nu este neapărat continuă.

Capitolul 3

Diferenţiabilitatea funcţiilor de mai multe variabile

3.2 Diferenţiala

Rezultă din exemplul 3.1.6 că noţiunea de derivată după o direcţie nu este cel mai bun substitut multi-dimensional pentru derivatele funcţiilor reale de o variabilă. Vom introduce, ca şi pentru funcţii de o variabilă, noţiunea de funcţie diferenţiabilă de mai multe variabile.

3.2.1 Definiţie. *Funcţia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *este* **diferenţiabilă** *în punctul* $a \in \mathring{A}$ *dacă există un operator liniar* $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *şi o funcţie* $\alpha : A \to \mathbb{R}$ *continuă şi nulă în* a $\left(\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \alpha(a) = 0\right)$ *a.î.*

$$(D) \qquad f(x) = f(a) + T(x-a) + \alpha(x) \cdot \|x-a\|, \forall x \in A.$$

Dacă f *este diferenţiabilă în* a *spunem că* T *este* **diferenţiala** *funcţiei* f *în* a *şi notăm aceasta cu* $df(a) = T$.

3.2.2 Observaţii. 1). Condiţia de diferenţiabilitate este o condiţie locală; astfel este suficient ca să existe operatorul liniar $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ şi o funcţie α definită pe o vecinătate $V \subseteq A$ a lui a, continuă şi nulă în a, pentru care relaţia (D) să fie verificată. Într-adevăr, în această situaţie putem defini $\bar{\alpha} : A \to \mathbb{R}$ prin $\bar{\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha(x) & , x \in V, \\ \dfrac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} & , x \in A \setminus V \end{cases}$ aşa fel încît relaţia (D) este verificată cu $\bar{\alpha}$ pe toată mulţimea A şi este evident că $\bar{\alpha}$ este continuă şi nulă în a.

2). Diferenţiala unei funcţii de mai multe variabile este un operator liniar, deci o funcţie. Apelînd la reprezentarea operatorilor liniari de la $\mathbb{R}^k$ la $\mathbb{R}$ (vezi exemplul 2.4.3, 2).), $\exists d = (d_1, ..., d_k) \in \mathbb{R}^k$ a.î., $\forall h = (h_1, ..., h_k) \in \mathbb{R}^k$,

$$df(a)(h) = T(h) = A_T \cdot h = (d_1, ..., d_k) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix} = d_1 h_1 + ... + d_k h_k = (d, h).$$

3). Dacă $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ este un operator liniar şi $a \in \mathbb{R}^k$ putem scrie: $T(x) = T(a) + T(x - a) + 0 \cdot \|x - a\|, \forall x \in \mathbb{R}^k$. Concluzia este că T este diferenţiabil în toate punctele lui $\mathbb{R}^k$ şi diferenţiala sa $dfT(a) = T$ este aceeaşi în toate punctele $a \in \mathbb{R}^k$.

3.2.3 Teoremă. *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ şi $a = (a_1, ..., a_k) \in \mathring{A}$; atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

(i) f este diferenţiabilă în a.

(ii) $\exists d \in \mathbb{R}^k, \exists \beta : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ o funcţie continuă şi nulă în a a.î.:

$$f(x) = f(a) + (d, x - a) + (\beta(x), x - a), \forall x \in A.$$

Demonstraţie.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Presupunem că f este diferenţiabilă în a şi fie $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ un operator liniar şi $\alpha : A \to \mathbb{R}$ continuă şi nulă în a a.î.

$$(D) \qquad f(x) = f(a) + T(x - a) + \alpha(x) \cdot \|x - a\|, \forall x \in A.$$

Atunci există $d \in \mathbb{R}^k$ a.î. $T(h) = (d, h), \forall h \in \mathbb{R}^k$ (vezi observaţia 3.2.2, 2).).

Fie $\beta : A \to \mathbb{R}^k$ definită prin:

$$\beta(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha(x)}{\|x - a\|} \cdot (x - a) & , x \neq a \\ (0, ..., 0) & , x = a \end{cases} , \forall x \in A.$$

Atunci $\|\beta(x)\| = \dfrac{|\alpha(x)|}{\|x - a\|} \cdot \|x - a\| = |\alpha(x)| \to 0$, deci $\beta : A \to \mathbb{R}^k$ este o funcţie continuă şi nulă în a.

Deoarece $(\beta(x), x - a) = \dfrac{\alpha(x)}{\|x - a\|} \cdot (x - a, x - a) = \alpha(x) \cdot \|x - a\|$, atunci relaţia (D) ne conduce la (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Din (ii) rezultă că putem construi operatorul liniar $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definit prin $T(h) = (d, h), \forall h \in \mathbb{R}^k$.

Fie funcţia $\alpha : A \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\|x-a\|} \cdot (\beta(x), x - a) & , x \neq a, \\ 0 & , x = a. \end{cases}$$

Remarcăm atunci că este verificată relaţia (D).

Folosind inegalitatea lui Cauchy (vezi ultima inegalitate din propoziţia 1.1.18), obţinem:

$$|\alpha(x)| \leq \frac{1}{\|x - a\|} \cdot \|\beta(x)\| \cdot \|x - a\|, \forall x \neq a$$

de unde rezultă că $\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$ şi deci funcţia f este diferenţiabilă în a. ∎

3.2.4 Teoremă. *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă în $a \in \mathring{A}$; atunci:*

1). f este continuă în a.

2). Oricare ar fi $u \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ f are derivată în a după direcţia u şi $\dfrac{df}{du}(a) = (df(a))(u)$.

Demonstraţie. Fie operatorul liniar $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ şi funcţia $\alpha : A \to \mathbb{R}$ continuă şi nulă în a a.î.

$$(D) \qquad f(x) = f(a) + T(x - a) + \alpha(x) \cdot \|x - a\|, \forall x \in A.$$

1). Deoarece orice operator liniar este funcţie lipschitziană, deci uniform continuă şi deci continuă pe $\mathbb{R}^k$ (propoziţia 2.4.4), din relaţia (D) obţinem: $\lim_{x \to a}(f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} T(x - a) + \lim_{x \to a} \alpha(x) \cdot \|x - a\| = 0$. Rezultă că f este continuă în a.

2). Oricare ar fi $u \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ există $\delta > 0$ a.î. oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$ cu $|t| < \delta, a + tu \in A$; din relaţia (D) obţinem atunci

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{T(tu) + \alpha(a + tu) \cdot \|tu\|}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(T(u) + \frac{|t|}{t} \cdot \alpha(a + tu) \cdot \|u\| \right) = T(u).$$

Deoarece T este diferenţiala funcţiei f în a rezultă că $\dfrac{df}{du}(a) = (df(a))(u)$. ∎

3.2.5 Observaţie. Funcţia din exemplul 3.1.6 are derivată în origine după orice direcţie $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ însă această derivată nu este funcţie liniară de (u,v) şi deci f nu este diferenţiabilă în $(0,0)$.

3.2.6 Corolar. *Dacă $f:A\subseteq\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ este diferenţiabilă în $a\in\mathring{A}$ atunci f are derivate parţiale în a în raport cu oricare variabilă x_i şi*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=(df(a))(e_i),\forall i=1,...,k.$$

3.2.7 Observaţii. 1). Fie $f:A\subseteq\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă în $a\in\mathring{A}$ şi fie $T=df(a)$; atunci $\exists d=(d_1,...,d_k)\in\mathbb{R}^k$ a.î. $T(h)=(d,h),\forall h\in\mathbb{R}^k$. Rezultă că $T(e_i)=(d,e_i)=d_i,\forall i=1,...,k$. Din corolarul precedent obţinem că $d_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a),\forall i=1,...,k$. Atunci matricea de reprezentare a operatorului liniar T este $A_T=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a),...,\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)\right)_{1\times k}$. Această matrice se mai notează cu $\nabla f(a)$ şi se numeşte **gradientul** lui f în a. Rezultă atunci că diferenţiala lui f în a se reprezintă prin:

$$df(a)(h)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k=\left(\nabla f(a),h\right),\forall h=(h_1,...,h_k)\in\mathbb{R}^k.$$

2). Dacă o funcţie este diferenţiabilă într-un punct atunci diferenţiala ei este unică; într-adevăr, din observaţia precedentă, diferenţiala este unic determinată de derivatele parţiale ale funcţiei.

3). Definim $\forall i=1,...,k$, funcţiile $f_i:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ prin $f_i(x)=(x,e_i)=x_i,\forall x=(x_1,...,x_k)\in\mathbb{R}^k$. Atunci fiecare f_i este un operator liniar şi deci este diferenţiabil în orice punct iar $df_i(a)=f_i$ în orice punct $a\in\mathbb{R}^k$ (vezi observaţia 3.2.2, 3).). Vom conveni să notăm $df_i(a)=dx_i,\forall i=1,...,k$ şi atunci $dx_i(h)=h_i,\forall i=1,...,k$.

Atunci diferenţiala unei funcţii $f:A\subseteq\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ într-un punct interior al mulţimii A se va scrie:

$$df(a)(h)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1(h)+...+\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)dx_k(h),\forall h\in\mathbb{R}^k$$

sau, dacă o scriem funcţional,

$$df(a)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)dx_k.$$

4). În teorema 3.2.4 am remarcat că o funcţie f diferenţiabilă într-un punct a interior mulţimii sale de definiţie $A \subseteq \mathbb{R}^k$ admite derivată după orice direcţie $u \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Utilizînd observaţiile de mai sus putem scrie:

$$\frac{df}{du}(a) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)u_i = (\nabla f(a), u) = \|\nabla f(a)\| \cdot \|u\| \cdot \cos\theta$$

unde θ este unghiul dintre vectorul gradient $\nabla f(a)$ şi vectorul direcţie $u \in \mathbb{R}^k$.

Vom prezenta acum o interpretare geometrică a diferenţialei unei funcţii de două variabile.

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $a = (a_1, a_2) \in \mathring{A}$; presupunem că funcţia f este diferenţiabilă în a; atunci după corolarul 3.2.4, f are derivată în a după orice versor $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ şi $\dfrac{df}{du}(a) = df(a)(u)$

Ca şi atunci cînd am prezentat o interpretare geometrică a derivatei după o direcţie, vom considera în planul $x_1 0 x_2$ semidreapta $(d) : x = a + tu, t > 0$ care trece prin punctul a şi are direcţia u.

Fie $(\pi) : \dfrac{x_1 - a_1}{u_1} = \dfrac{x_2 - a_2}{u_2}$ planul care conţine această semidreaptă şi este perpendicular pe planul $x_1 0 x_2$. Planul (π) decupează în pînza G_f un arc de curbă care pleacă din punctul $P = (a_1, a_2, f(a_1, a_2)) \in G_f$ şi care este plasat pe G_f. Aşa cum am observat, există tangenta la acest arc de curbă şi are direcţia dată de vectorul $v = \left(u_1, u_2, \dfrac{df}{du}(a)\right)$. Deoarece funcţia este diferenţiabilă în a, $\dfrac{df}{du}(a)$ variază liniar cu u (corolarul 3.2.4) şi atunci direcţiile v se plasează pe un plan cînd vectorul u parcurge versorii lui $\mathbb{R}^2$.

Într-adevăr, în acest caz: $v = \left(u_1, u_2, \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot u_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a) \cdot u_2\right) =$
$= u_1 \cdot \left(1, 0, \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right) + u_2 \cdot \left(0, 1, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right) + (1 - u_1 - u_2) \cdot (0, 0, 0)$, adică v descrie un plan care trece prin origine şi prin punctele $\left(1, 0, \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right)$ şi $\left(0, 1, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right)$.

Dacă eliminăm parametrii u_1 şi u_2 din ecuaţia parametrică a acestui plan obţinem ecuaţia sa explicită

$$(\Delta) \qquad \boxed{x_3 = df(a)(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \cdot x_2.}$$

Deoarece direcţiile tangentelor în P la arcele de curbă de pe graficul lui f (după toate direcţiile u posibile) sînt coplanare, aceste tangente sînt şi ele coplanare şi generează planul tangent la suprafaţa G_f în punctul P.

Rezultă că dacă o funcţie f este diferenţiabilă într-un punct a atunci graficul său admite un plan tangent în punctul $(a, f(a))$ şi acesta este paralel cu planul $(\Delta) : x_3 = df(a)(x_1, x_2)$.

Ecuaţia planului tangent în P se obţine prin translaţia planului (Δ) cu vectorul $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ ceea ce ne conduce la ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + u_1 \\ x_2 = a_2 + u_2 \\ x_3 = f(a_1, a_2) + \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot u_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a) \cdot u_2 \end{cases} , u_1, u_2 \in \mathbb{R}$$

Dacă eliminăm parametrii obţinem ecuaţia explicită a acestui plan tangent:

$$(T) \qquad \boxed{x_3 - f(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot (x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \cdot (x_2 - a_2).}$$

Aşa cum am observat, existenţa derivatelor parţiale ale unei funcţii (chiar existenţa derivatelor după toate direcţiile) într-un punct nu antrenează diferenţiabilitatea funcţiei. Putem totuşi formula o condiţie suficientă de diferenţiabilitate în limbajul derivatelor parţiale.

3.2.8 Teoremă (criteriul de diferenţiabilitate). *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, a \in \mathring{A}$ şi $r > 0$ a.î. sfera deschisă $S(a, r) \subseteq A$. Dacă f admite derivate parţiale în raport cu toate variabilele în toate punctele sferei $S(a, r)$ şi acestea sînt continue în a atunci f este diferenţiabilă în a.*

Demonstraţie. Vom face demonstraţia în cazul particular $k = 2$; în cazul general demonstraţia nu comportă decît dificultăţi de scriere.

Presupunem deci că $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (a, b) \in \mathring{A}$ şi $S((a, b), r) \subseteq A$; de asemenea presupunem că există $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} : S(a, r) \to \mathbb{R}$ şi că

$$(1) \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \text{ şi } \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

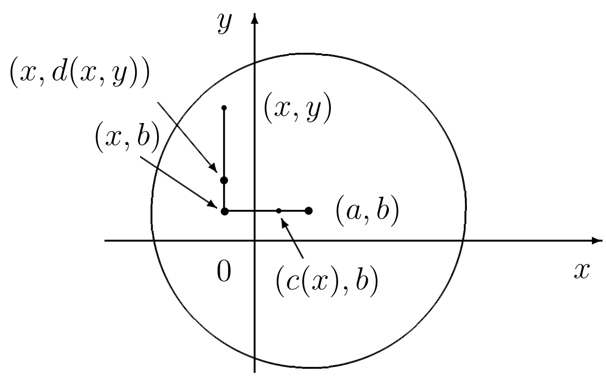
Fie $(x, y) \in S((a, b), r) \setminus \{(a, b)\}$ un punct fixat pentru moment; atunci:

$$f(x, y) - f(a, b) = [f(x, y) - f(x, b)] + [f(x, b) - f(a, b)]. \tag{2}$$

Funcţia de o variabilă $g = f(x, \cdot) : [b, y] \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe $[b, y]$ şi $g'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, t), \forall t \in [b, y]$. Atunci putem să aplicăm acestei funcţii teorema lui Lagrange; deci există $d(x, y) \in]b, y[$ a.î.

$$f(x, y) - f(x, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, d(x, y)) \cdot (y - b). \tag{3}$$

Schiţăm mai jos poziţia punctelor care apar în demonstraţie.



În mod asemănător considerăm funcţia de o variabilă $h = f(\cdot, b) : [x, a] \to \mathbb{R}$; h este derivabilă pe $[x, a]$ şi $h'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, b), \forall t \in [x, a]$. Deci există $c(x) \in]x, a[$ a.î.

$$f(x, b) - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(c(x), b) \cdot (x - a). \tag{4}$$

Înlocuind (3) şi (4) în (2) obţinem:

$$f(x, y) - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(c(x), b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, d(x, y)) \cdot (y - b) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)) \cdot (y - b) +$$

$$+ \left[\frac{\partial f}{\partial x}(c(x), b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\right] \cdot (x - a) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, d(x, y)) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right] \cdot (y - b).$$

Deoarece (x, y) este arbitrar în $S((a, b), r) \setminus \{(a, b)\}$, putem defini acum:

$$\beta_1(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(c(x), b) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) & , (x, y) \neq (a, b) \\ 0 & , (x, y) = (a, b) \end{cases} \quad \text{şi}$$

$$\beta_2(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, d(x, y)) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) & , (x, y) \neq (a, b) \\ 0 & , (x, y) = (a, b) \end{cases}.$$

Astfel există $d = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b), \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right) \in \mathbb{R}^2$ şi o funcţie vectorială $\beta : S((a, b), r) \to \mathbb{R}^2, \beta = (\beta_1, \beta_2)$ a.î., $\forall (x, y) \in S((a, b), r)$,

$$f(x, y) = f(a, b) + (d, (x - a, y - b)) + (\beta(x, y), (x - a, y - b)).$$

Aşa cum am remarcat în observaţia 3.2.2, 1)., condiţia de diferenţiabilitate este locală; deci este suficient ca relaţia de mai sus să fie verificată pe o vecinătate a lui (a, b).

Atunci este suficient să demonstrăm că β este continuă în (a, b) pentru ca să rezulte, din teorema 3.2.3, (ii), că f este diferenţiabilă în (a, b).

Din (1), $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \delta < r$ a.î. $\forall (x, y) \in S((a, b), \delta)$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right| < \varepsilon \tag{5}$$

şi

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right| < \varepsilon. \tag{6}$$

Dar $\forall (x, y) \in S((a, b), \delta), (c(x), b) \in S((a, b), \delta)$ şi $(x, d(x, y)) \in S((a, b), \delta)$. Rezultă atunci din definiţia funcţiilor β_1 şi β_2 şi din relaţiile (5) şi (6) că

$$|\beta_1(x, y) - \beta_1(a, b)| < \varepsilon \text{ şi } |\beta_2(x, y) - \beta_2(a, b)| < \varepsilon,$$

ceea ce arată că $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \beta_1(x, y) = \beta_1(a, b) = 0$ şi $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \beta_2(x, y) = \beta_2(a, b) = 0$. ■

Criteriul de diferenţiabilitate din teorema precedentă sugerează introducerea unei clase importante de funcţii diferenţiabile.

3.2.9 Definiţie. *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă; spunem că o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ este de* **clasă $\mathbf{C}^1$** *pe D sau că $f \in C^1(D)$ dacă toate derivatele parţiale ale lui f există şi sînt continue în toate punctele mulţimii D.*

Utilizînd criteriul de diferenţiabilitate din teorema 3.2.8, obţinem:

3.2.10 Corolar. *O funcţie de clasă C^1 pe D este diferenţiabilă în toate punctele mulţimii D.*

Capitolul 3

Diferenţiabilitatea funcţiilor de mai multe variabile

3.2 Diferenţiala

Diferenţiabilitatea funcţiilor vectoriale

Să considerăm acum pe rînd conceptele de derivată după o direcţie, diferenţiabilitate şi diferenţială pentru funcţiile vectoriale. Aceasta oferă un bun prilej de reluare şi de fixare a noţiunilor şi rezultatelor deja prezentate pentru funcţiile scalare.

Derivata după o direcţie

3.2.11 Definiţie. *Fie* $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$, $a \in \mathring{A}$ *şi* $u \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$*; spunem că* f *are* **derivată în a după direcţia u** *dacă există*

$$\frac{df}{du}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[f(a+tu) - f(a)\right] \in \mathbb{R}^l.$$

Expresia din paranteza pătrată de mai sus este un vector iar fracţia din faţă este un scalar; vom conveni totuşi, pentru asemănarea cu cazul scalar, să scriem $\dfrac{df}{du}(a) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+tu) - f(a)}{t}$.

3.2.12 Observaţii. 1). Dacă $(f_1, ..., f_l)$ sînt funcţiile scalare de coordonate ale lui f atunci, din teorema 2.2.3 ştim că limita funcţiei vectoriale

$\dfrac{f(a+tu)-f(a)}{t}$ există dacă şi numai dacă, $\forall j \in \{1,...,l\}$, există limita funcţiei scalare $\dfrac{f_j(a+tu)-f_j(a)}{t}$, pentru $t \to 0$, deci dacă şi numai dacă f_j are derivată în a după direcţia u şi în plus:

$$\frac{df}{du}(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{df_1}{du}(a) \\ \vdots \\ \dfrac{df_l}{du}(a) \end{pmatrix}.$$

2). În cazul particular cînd $u = e_i, i = 1,...,k$, obţinem

$$\frac{df}{de_i}(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{df_1}{de_i}(a) \\ \vdots \\ \dfrac{df_l}{de_i}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(a) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_l}{\partial x_i}(a) \end{pmatrix}$$

3). Dacă $k = 1$ atunci $\forall j = 1,...,l$,

$$\frac{df_j}{de_1}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f_j(a+t)-f_j(a)}{t} = f_j'(a) \text{ şi deci } \frac{df}{de_1}(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_l'(a) \end{pmatrix}.$$

În acest caz vom conveni să spunem că funcţia f este **derivabilă** în a; notăm $f'(a) = \dfrac{df}{de_1}(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_l'(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^l$ şi o numim **derivata** funcţiei f în a.

3.2.13 Definiţie. *Să presupunem că funcţia vectorială f are derivate după toţi vectorii bazei canonice $\{e_1,...,e_k\}$ în a; atunci matricea*

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_k}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_l}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_l}{\partial x_k}(a) \end{pmatrix}_{l\times k}$$

se numeşte **matricea jacobiană** *ataşată funcţiei f în punctul a (numele este dat în onoarea matematicianului german* CARL JACOBI*).*

În cazul particular $l = k$ această matrice este pătratică; determinantul asociat ei

$$\det J_f(a) = \frac{D(f_1, ..., f_k)}{D(x_1, ..., x_k)}(a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(a) \end{vmatrix}$$

se numeşte **determinantul funcţional** *sau* **jacobianul** *lui f în a.*

Este evident că, şi pentru funcţiile vectoriale, existenţa derivatelor după orice direcţie într-un punct nu va antrena, în general, continuitatea.

Diferenţiabilitatea

3.2.14 Definiţie. *O funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ este* **diferenţiabilă** *în $a \in \mathring{A}$ dacă există un operator liniar $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ şi o funcţie $\alpha : A \to \mathbb{R}^l$ continuă şi nulă în a a.î.*

$$(D) \qquad f(x) = f(a) + T(x - a) + \|x - a\| \cdot \alpha(x), \forall x \in A.$$

Operatorul T se numeşte **diferenţiala** *lui f în a şi se notează $df(a) = T$.*

3.2.15 Observaţii. 1). Relaţia (D) de mai sus este vectorială (o relaţie între vectori din $\mathbb{R}^l$).

2). Funcţia f este diferenţiabilă în a dacă şi numai dacă există un operator liniar $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ a.î. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{\|x - a\|} = 0$.

Dacă în relaţia (D) egalăm componentele vectorilor din cei doi membri obţinem:

3.2.16 Teoremă. *Funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l, f = (f_1, ..., f_l)$, este diferenţiabilă în $a \in \mathring{A}$ dacă şi numai dacă, $\forall j \in \{1, ..., l\}, f_j$ este diferenţiabilă în a şi*

$$df(a)(h) = \begin{pmatrix} df_1(a)(h) \\ \vdots \\ df_l(a)(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a) h_i \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f_l}{\partial x_i}(a) h_i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_l}{\partial x_k}(a) \end{pmatrix}_{l\times k} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix}_{k\times 1} = J_f(a)\cdot h, \forall h \in \mathbb{R}^k.$$

3.2.17 Observaţii. 1). Matricea jacobiană a funcţiei f în a este chiar matricea asociată diferenţialei lui f în a (diferenţială privită ca operator liniar). Rezultă că diferenţiabilitatea într-un punct antrenează existenţa matricii jacobiene în acel punct.

2). Dacă $k = 1$ atunci $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^l, f = (f_1, ..., f_l)$ este diferenţiabilă în $a \in \mathring{A}$ dacă şi numai dacă, $\forall j = 1, ..., l, f_j : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă în a deci dacă şi numai dacă f_j este derivabilă în a şi

$$df(a)(h) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_l'(a) \end{pmatrix} \cdot h, \forall h \in \mathbb{R}.$$

Rezultă că, în acest caz, f este diferenţiabilă în a dacă şi numai dacă f este derivabilă în a şi $df(a)(h) = f'(a)\cdot h, \forall h \in \mathbb{R}$ (vezi observaţia 3.2.12, 3)).

În cazul $k > 1$ existenţa matricii jacobiene într-un punct nu antrenează, în general, diferenţiabilitatea în acel punct; totuşi ţinînd cont de teorema de mai sus şi de criteriul scalar de diferenţiabilitate, putem obţine varianta vectorială a acestui criteriu.

3.2.18 Teoremă (criteriul de diferenţiabilitate). *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ şi $a \in \mathring{A}$; dacă matricea jacobiană a lui f există pe o vecinătate a lui a şi este continuă în a (toate derivatele parţiale care formează această matrice sînt continue în a) atunci f este diferenţiabilă în a.*

3.2.19 Definiţie. *O funcţie vectorială f definită pe o mulţime deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^k$ este de* **clasă $\mathbf{C^1}$ pe D**, *sau $f \in C^1(D)$, dacă matricea jacobiană a funcţiei f există şi este continuă în toate punctele lui D.*

3.2.20 Corolar. *O funcţie vectorială de clasă C^1 pe mulţimea deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^k$ este diferenţiabilă în toate punctele lui D.*

3.2.21 Exemple. 1). Fie $f : [0,+\infty[\times[0,2\pi[\to \mathbb{R}^2$, definită prin $f(r,u) = (r\cos u, r\sin u), \forall (r,u) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi[; f$ reprezintă trecerea de la coordonatele polare la cele carteziene în plan; f este diferenţiabilă pe $]0,+\infty[\times]0,2\pi[$. Matricea jacobiană a lui f este $J_f = \begin{pmatrix} \cos u & -r\sin u \\ \sin u & r\cos u \end{pmatrix}$, jacobianul lui f este $\det J_f = r$ iar diferenţiala lui f într-un punct (r,u) va fi:

$$df(r,u) = \begin{pmatrix} \cos u \cdot dr - r\sin u \cdot du \\ \sin u \cdot dr + r\cos u \cdot du \end{pmatrix}.$$

2). Trecerea de la coordonatele polare la cele carteziene în spaţiu este dată de funcţia $f : [0,+\infty[\times[0,2\pi[\times[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$,
$f(r,u,v) = (r\cos u\cos v, r\sin u\cos v, r\sin v)$,
$\forall (r,u,v) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi[\times[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]$

f este o funcţie diferenţiabilă pe $]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$. Matricea jacobiană a lui f este $J_f = \begin{pmatrix} \cos u\cos v & -r\sin u\cos v & -r\cos u\sin v \\ \sin u\cos v & r\cos u\cos v & -r\sin u\sin v \\ \sin v & 0 & r\cos v \end{pmatrix}$.

Jacobianul transformării este $\det J_f = r^2\cos v$. Diferenţiala funcţiei f este

$$df(r,u,v) = \begin{pmatrix} \cos u\cos v \cdot dr - r\sin u\cos v \cdot du - r\cos u\sin v \cdot dv \\ \sin u\cos v \cdot dr + r\cos u\cos v \cdot du - r\sin u\sin v \cdot dv \\ \sin v \cdot dr + r\cos v \cdot dv \end{pmatrix}.$$

Operaţii cu funcţii diferenţiabile

3.2.22 Teoremă. *Fie $f,g : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ două funcţii diferenţiabile în $a \in \mathring{A}$; atunci:*

1). $f+g$ este diferenţiabilă în a şi $d(f+g)(a) = df(a) + dg(a)$.

2). $t\cdot f$ este diferenţiabilă în a şi $d(t\cdot f)(a) = t\cdot df(a)$.

3). $(f,g) : A \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă în a şi

$$d(f,g)(a) = (df(a), g(a)) + (f(a), dg(a)).$$

Demonstraţie. Fie $T = df(a) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ diferenţiala lui f în a şi $S = dg(a) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ diferenţiala lui g în a; T şi S sînt operatori liniari. Fie $\alpha : A \to \mathbb{R}^l$ şi $\beta : A \to \mathbb{R}^l$ două funcţii continue şi nule în a a.î.:

$$(D_f) \qquad f(x) = f(a) + T(x-a) + \|x-a\|\cdot\alpha(x), \forall x \in A.$$

$$(D_g) \qquad g(x) = g(a) + S(x-a) + \|x-a\| \cdot \beta(x), \forall x \in A.$$

Atunci $(f+g)(x) = (f+g)(a) + (T+S)(x-a) + \|x-a\| \cdot (\alpha+\beta)(x), \forall x \in A$. Deoarece $T+S$ este operator liniar iar funcţia $\alpha+\beta$ este continuă şi nulă în a rezultă că $f+g$ este diferenţiabilă în a şi că $d(f+g)(a) = T+S = df(a) + dg(a)$.

La fel se demonstrează şi 2).

3). Din (D_f) şi (D_g) obţinem, $\forall x \in A \setminus \{a\}$,

$$(f(x), g(x)) = (f(a), g(a)) + (f(a), S(x-a)) + (T(x-a), g(a)) + \gamma(x) \cdot \|x-a\|,$$

unde

$$\gamma(x) = (f(a), \beta(x)) + \frac{1}{\|x-a\|} \cdot (T(x-a), S(x-a)) + (T(x-a), \beta(x)) +$$
$$+ (\alpha(x), g(a)) + (\alpha(x), S(x-a)) + (\alpha(x), \beta(x)) \cdot \|x-a\|.$$

Definim $\gamma(a) = 0$ şi atunci $\gamma : A \to \mathbb{R}$.

Fie $R : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $R(h) = (f(a), S(h)) + (T(h), g(a))$; atunci R este operator liniar şi

$$(f, g)(x) = (f, g)(a) + R(x-a) + \gamma(x) \cdot \|x-a\|, \forall x \in A.$$

Rămîne să demonstrăm că γ este continuă în a. $\forall x \in A \setminus \{a\}$,

$$|\gamma(x)| \leq \|f(a)\| \cdot \|\beta(x)\| + \frac{1}{\|x-a\|} \cdot \|T(x-a)\| \cdot \|S(x-a)\| + \|T(x-a)\| \cdot \|\beta(x)\| +$$
$$+ \|\alpha(x)\| \cdot \|g(a)\| + \|\alpha(x)\| \cdot \|S(x-a)\| + \|\alpha(x)\| \cdot \|\beta(x)\| \cdot \|x-a\|$$

În propoziţia 2.4.4 am arătat că orice operaţie liniară este lipschitziană; fie deci $L_T, L_S > 0$ a.î. $\|T(x-a)\| \leq L_T \cdot \|x-a\|$ şi $\|S(x-a)\| \leq L_S \cdot \|x-a\|$.

Deoarece α şi β sînt funcţii continue şi nule în a, $\lim_{x \to a} \|\alpha(x)\| = \|\alpha(a)\| = 0$ şi $\lim_{x \to a} \|\beta(x)\| = \|\beta(a)\| = 0$. Rezultă imediat că $\lim_{x \to a} \gamma(x) = 0 = \gamma(a)$ ceea ce arată că (f, g) este diferenţiabilă în a.

$d(f, g)(a) = R = (f(a), S) + (T, g(a)) = (f(a), dg(a)) + (df(a), g(a))$. ∎

3.2.23 Teoremă. *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ şi $g : B \subseteq \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ a.î. $f(A) \subseteq B$; dacă f este diferenţiabilă în $a \in \mathring{A}$ iar g este diferenţiabilă în $b = f(a) \in \mathring{B}$ atunci $g \circ f : A \to \mathbb{R}^m$ este diferenţiabilă în a şi*

$$d(g \circ f)(a) = [dg(f(a))] \circ df(a).$$

Demonstraţie. Fie $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l, S : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ operatori liniari a.î. $df(a) = T$ şi $dg(f(a)) = S$; fie $\alpha : A \to \mathbb{R}^l$ continuă şi nulă în a şi $\beta : B \to \mathbb{R}^m$ continuă şi nulă în $b = f(a)$ a.î.

$$(1) \qquad f(x) = f(a) + T(x-a) + \|x-a\| \cdot \alpha(x), \forall x \in A,$$

$$(2) \qquad g(y) = g(b) + S(y-b) + \|y-b\| \cdot \beta(y), \forall y \in B,$$

$\forall x \in A, y = f(x) \in B$ şi atunci, din (2),

$$(3) \qquad g(f(x)) = g(f(a)) + S(f(x) - f(a)) + \|f(x) - f(a)\| \cdot \beta(f(x)).$$

În (3) înlocuim $f(x) - f(a)$ cu valoarea sa obţinută din (1) şi ţinem cont de liniaritatea lui S; atunci, $\forall x \in A \setminus \{a\}$,

$$(4) \qquad g(f(x)) = g(f(a)) + S\left[T(x-a) + \|x-a\| \cdot \alpha(x)\right] +$$

$$+ \|T(x-a) + \|x-a\| \cdot \alpha(x)\| \cdot \beta(f(x)) = g(f(a)) + S(T(x-a)) +$$

$$+ \|x-a\| \cdot \left(S(\alpha(x)) + \left\| \frac{1}{\|x-a\|} \cdot T(x-a) + \alpha(x) \right\| \cdot \beta(f(x)) \right).$$

Fie atunci $\gamma : A \to \mathbb{R}^m$ definită prin

$$\gamma(x) = \begin{cases} S(\alpha(x)) + \left\| \dfrac{1}{\|x-a\|} \cdot T(x-a) + \alpha(x) \right\| \cdot \beta(f(x)) & , x \neq a \\ 0 & , x = a \end{cases}$$

Atunci (4) se scrie

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(a) + (S \circ T)(x-a) + \|x-a\| \cdot \gamma(x), \forall x \in A.$$

Cum $S \circ T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ este operator liniar, pentru a demonstra că $g \circ f$ este diferenţiabilă în a, este suficient să arătăm că γ este continuă în a.

Deoarece α este continuă şi nulă în a iar S este continuu pe $\mathbb{R}^l$ (propoziţia 2.4.4) şi se anulează în 0 rezultă că

$$(5) \qquad \lim_{x \to a} S(\alpha(x)) = 0.$$

Utilizînd iar propoziţia 2.4.4, rezultă că T este lipschitzian; există deci $L > 0$ a.î. $\|T(x-a)\| = \|T(x) - T(a)\| \leq L \cdot \|x-a\|, \forall x \in A$. Atunci

$$\left\|\frac{1}{\|x-a\|} \cdot T(x-a) + \alpha(x)\right\| \cdot \|\beta(f(x))\| \leq (L + \|\alpha(x)\|) \cdot \|\beta(f(x))\|. \tag{6}$$

Funcţia f este diferenţiabilă în a şi deci este continuă în a (corolarul 3.2.4, 1).); deoarece β este continuă şi nulă în $b = f(a)$, rezultă că

$$\lim_{x \to a} \beta(f(x)) = \beta(f(a)) = 0. \tag{7}$$

Atunci, din $(5), (6)$ şi (7) rezultă că $\lim_{x\to a} \gamma(x) = 0 = \gamma(a)$. ■

3.2.24 Corolar. *În ipotezele teoremei precedente*

$$J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a).$$

Demonstraţie.
Din teorema 3.2.16 ştim că $d(g \circ f)(a)(h) = J_{g\circ f}(a) \cdot h, \forall h \in \mathbb{R}^k$.
Din teorema precedentă, $\forall h \in \mathbb{R}^k$, $d(g \circ f)(a)(h) = [dg(f(a)) \circ df(a)]\,(h) = dg(f(a))(df(a)(h)) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a) \cdot h$, de unde rezultă relaţia din corolar.

De altfel, rezultatul acestui corolar este şi consecinţa imediată a teoremei 2.4.5, 2)., unde se arată că matricea asociată compunerii a două aplicaţii liniare este produsul matricilor asociate a celor două aplicaţii.

Să considerăm funcţiile de coordonate ale aplicaţiilor vectoriale f şi g: $f = (f_1, ..., f_l), g = (g_1, ..., g_m)$; atunci relaţia din corolar se scrie:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial(g_1 \circ f)}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial(g_1 \circ f)}{\partial x_k}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial(g_m \circ f)}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial(g_m \circ f)}{\partial x_k}(a) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(a)) & \dots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_l}(f(a)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial y_1}(f(a)) & \dots & \dfrac{\partial g_m}{\partial y_l}(f(a)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_k}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_l}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_l}{\partial x_k}(a) \end{pmatrix}$$

Elementul de pe linia i şi coloana j din matricea produs se obţine înmulţind linia i din primul factor cu coloana j din factorul doi; astfel obţinem, $\forall i = 1, ..., m, j = 1, ..., k$:

$$(DC) \qquad \boxed{\frac{\partial(g_i \circ f)}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial g_i}{\partial y_1}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) + ... + \frac{\partial g_i}{\partial y_l m}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_l}{\partial x_j}(a)}$$

3.2.25 Cazuri particulare.

1). $\boxed{m = 1}$

În acest caz $(g \circ f)(x_1, ..., x_k) = g(f_1(x_1, ..., x_k), ..., f_l(x_1, ..., x_k))$.
Formula (DC) devine

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) + ... + \frac{\partial g}{\partial y_l}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_l}{\partial x_j}(a), \forall j = 1, ..., k.$$

Fie acum $k = l = 2$ şi funcţiile $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, g : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \overset{f}{\mapsto} (u(x, y), v(x, y)) \in \mathbb{R}^2, (u, v) \overset{g}{\mapsto} g(u, v) \in \mathbb{R}$. Funcţia compusă $h = g \circ f$ este definită prin $h(x, y) = g(f(x, y)) = g(u(x, y), v(x, y)), \forall (x, y) \in A$. Dacă $(a, b) \in \mathring{A}$, f este diferenţiabilă în (a, b) şi g este diferenţiabilă în $f(a, b) \in \mathring{B}$ atunci $dh(a, b) = dg(f(a, b)) \circ df(a, b)$ ceea ce antrenează pentru matricile jacobiene: $J_h(a, b)_{1\times 2} = J_g(f(a, b))_{1\times 2} \cdot J_f(a, b)_{2\times 2}$. Scriind explicit această ultimă relaţie, obţinem:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial h}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(f(a, b)) & \frac{\partial g}{\partial v}(f(a, b)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial u}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial v}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix}$$

de unde:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial g}{\partial u}(f(a, b)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial g}{\partial v}(f(a, b)) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(a, b) \\ \\ \frac{\partial h}{\partial y}(a, b) = \frac{\partial g}{\partial u}(f(a, b)) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(a, b) + \frac{\partial g}{\partial v}(f(a, b)) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(a, b) \end{cases}$$

Dacă am presupune, în plus, că există $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v)$, $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$ pe o întreagă vecinătate a lui $f(a, b)$ şi sînt la rîndul lor diferenţiabile în $f(a, b)$ iar f admite derivate parţiale de ordin doi, atunci am putea aplica formula de derivare de la funcţii compuse pentru a obţine derivatele de ordin doi ale lui

h în (a,b); vom prezenta mai jos calculul acestor derivate fără a mai pune în evidenţă punctele în care sînt calculate (derivatele lui h şi cele ale lui u şi v sînt calculate în (a,b) iar derivatele lui g în $f(a,b)$):

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y\partial x} = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y} = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Capitolul 3

Diferenţiabilitatea funcţiilor de mai multe variabile

3.2 Diferenţiala

3.2.26 2). $\boxed{k = m = 1}$
Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^l$ şi $g : B \subseteq \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ cu condiţia de compunere $f(A) \subseteq B$; atunci $f(t) = (f_1(t), ..., f_l(t)), \forall t \in A$, iar funcţia compusă este $h : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(t) = g(f_1(t), ..., f_l(t)), \forall t \in A$; h este deci o funcţie reală de o variabilă reală.

Fie $a \in \mathring{A}$; dacă f este diferenţiabilă în a şi g este diferenţiabilă în $f(a) \in \mathring{B}$ atunci: $dh(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$ iar matricile jacobiene verifică relaţia $J_h(a)_{1\times 1} = J_g(f(a))_{1\times l} \cdot J_f(a)_{l\times 1}$ ceea ce explicit se scrie:

$$\big(h'(a)\big) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial y_1}(f(a)) & \dots & \dfrac{\partial g}{\partial y_l}(f(a)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_l'(a) \end{pmatrix},$$

de unde obţinem

$$h'(a) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(a)) \cdot f_1'(a) + ... + \frac{\partial g}{\partial y_l}(f(a)) \cdot f_l'(a).$$

O situaţie concretă în care putem întîlni o astfel de compunere este aceea în care A este un interval închis din $\mathbb{R}$, f este o funcţie continuă (deci un drum sau un arc) cu graficul într-o mulţime din $\mathbb{R}^3$ (care poate fi gîndită ca interiorul unei încăperi) iar g reprezintă temperatura în punctele acelei încăperi. Funcţia $g \circ f$ reprezintă temperatura de-a lungul drumului f iar derivata acesteia reprezintă variaţia temperaturii pe arcul f.

Fie $l = 2$, $\varphi : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \varphi(t) = (u(t), v(t))$ şi $f : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a.î. $\varphi(A) \subseteq B$; atunci funcţia compusă este $h = f \circ \varphi : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(t) = f(u(t), v(t)), \forall t \in A$. Dacă φ este diferenţiabilă pe $\mathring{A}$ (ceea ce, după observaţia 3.2.17, 2), este echivalent cu a spune că φ este derivabilă pe $\mathring{A}$) , f este diferenţiabilă pe $\mathring{B}$ iar $\varphi(\mathring{A}) \subseteq \mathring{B}$ atunci h este derivabilă pe $\mathring{A}$ şi

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(t), v(t)) \cdot u'(t) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(t), v(t)) \cdot v'(t), \forall t \in \mathring{A}.$$

Dacă $a = (a_1, a_2) \in \mathring{B}$ (deci $\exists r > 0$ a.î. $T(a, r) \subseteq A)$, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ şi $\delta = \frac{r}{\|u\|}$ atunci $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}^2, \varphi(t) = a + tu, \forall t \in [-\delta, \delta]$ este un drum al cărui grafic este un segment ce trece prin a şi are direcţia u. Dacă f este diferenţiabilă în a atunci $h = f \circ \varphi$ este derivabilă în 0 şi, după formula de derivare de mai sus,

$$h'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot \varphi_1'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot \varphi_2'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) \cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) \cdot u_2 =$$

$$= df(a)(u) = \frac{df}{du}(a).$$

Rezultă că derivata funcţiei f în a după direcţia u este derivata unei funcţii compuse.

3). $\boxed{k = 2, l = 3, m = 1}$

Fie $f = (f_1, f_2, f_3) : A \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, g : B \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cu $f(A) \subseteq B$; dacă f este diferenţiabilă în punctul $a \in \mathring{A}$ şi g este diferenţiabilă în $f(a) \in \mathring{B}$ atunci funcţia compusă $h = g \circ f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, h(x, y) = g(f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$ este diferenţiabilă în a şi $dh(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$ de unde obţinem $J_h(a)_{1\times 2} = J_g(f(a))_{1\times 3} \cdot J_f(a)_{3\times 2}$ sau scris dezvoltat (fără a mai pune în evidenţă punctele în care sînt calculate derivatele parţiale):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1} & \frac{\partial g}{\partial y_2} & \frac{\partial g}{\partial y_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Putem atunci obţine derivatele parţiale ale funcţiei compuse h:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y_2} \cdot \dfrac{\partial f_2}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y_3} \cdot \dfrac{\partial f_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial y_2} \cdot \dfrac{\partial f_2}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial y_3} \cdot \dfrac{\partial f_3}{\partial y} \end{cases}.$$

3.3 Diferenţiale de ordin superior

Derivate mixte

Aşa cum am menţionat deja, derivatele parţiale mixte de ordin doi ale unei funcţii de mai multe variabile nu sînt, în general, egale.

În teorema următoare prezentăm două criterii (condiţii suficiente) pentru ca derivatele mixte să coincidă.

3.3.1 Teoremă. *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ şi $a \in \mathring{A}$.*

1). **Criteriul lui Schwarz.**

Fie $i, j \in \{1, ..., k\}$; dacă există $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ pe o vecinătate a punctului a şi sînt continue în a atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

2). **Criteriul lui Young.**

Dacă, $\forall i \in \{1, ..., k\}$, există $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ pe o vecinătate a punctului a şi este diferenţiabilă în a atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \forall i, j \in \{1, ..., k\}.$$

(!) **Demonstraţie**. Observăm întîi că demonstraţia se poate reduce la cea din cazul $k = 2$. Într-adevăr, în loc să studiem problema pentru funcţia de k variabile f considerăm funcţia de două variabile

$$(x_i, x_j) \mapsto f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, ..., a_k)$$

ale cărei derivate de ordin doi după x_i şi x_j în punctul a coincid cu cele ale lui f.

Fie deci $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $(a,b) \in \mathring{A}$. Considerăm $S \subseteq A$ o sferă cu centrul în (a,b) şi de rază r drept vecinătate pe care au loc condiţiile din criteriul lui Schwarz, respectiv cele din criteriul lui Young.

Fie $(x,y) \in S$ cu $x \neq a$ şi $y \neq b$ un punct arbitrar dar fixat şi fie expresia $g(x,y) = f(x,y) - f(x,b) - f(a,y) + f(a,b)$. Definim două funcţii de o variabilă astfel:

$\varphi : [a,x] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(t) = f(t,y) - f(t,b), \forall t \in [a,x]$ şi

$\psi : [b,y] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(s) = f(x,s) - f(a,s), \forall s \in [b,y]$.

Atunci $g(x,y) = \varphi(x) - \varphi(a) = \psi(y) - \psi(b)$.

Din ipotezele ambelor criterii rezultă că există $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ pe S şi astfel φ şi ψ sînt derivabile pe intervalele lor de definiţie şi

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,b), \forall t \in [a,x],$$

$$\psi'(s) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,s) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,s), \forall s \in [b,y].$$

Putem astfel să aplicăm teorema creşterilor finite (teorema lui Lagrange) celor două funcţii.

Deci există $c \in (a,x)$ şi $d \in (b,y)$ a.î.

$$g(x,y) = \varphi'(c)(x-a) = \psi'(d)(y-b) \tag{1}$$

iar

$$\varphi'(c) = \frac{\partial f}{\partial x}(c,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(c,b), \tag{2}$$

$$\psi'(d) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,d) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,d). \tag{3}$$

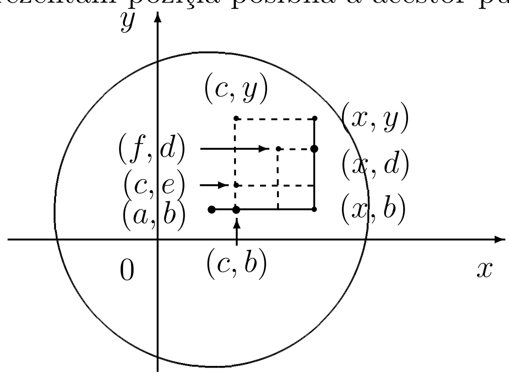
1). Să presupunem acum că ne situăm în condiţiile criteriului lui Schwarz; atunci există $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ pe S şi sînt continue în (a,b).

În (2) şi (3) putem aplica din nou teorema lui Lagrange şi obţinem punctele $e \in [b,y]$ şi $f \in [a,x]$ a.î.

$$\varphi'(c) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c,e)(y-b), \tag{4}$$

$$\psi'(d) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(f,d)(x-a). \tag{5}$$

Reprezentăm poziţia posibilă a acestor puncte în figura următoare:



Din (1), (4) şi (5) rezultă că, $\forall (x,y) \in S, x \neq a, y \neq b$, există două puncte, $(c(x,y), e(x,y)), (f(x,y), d(x,y)) \in (a,x) \times (b,y)$, a.î.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c(x,y), e(x,y)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(f(x,y), d(x,y)). \tag{6}$$

Trecem la limită pentru $(x,y) \to (a,b)$ în (6) şi, deoarece derivatele mixte sînt continue iar
$\lim_{(x,y)\to(a,b)} c(x,y) = a = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$,
$\lim_{(x,y)\to(a,b)} e(x,y) = b = \lim_{(x,y)\to(a,b)} d(x,y)$, rezultă că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b).$$

2). Să presupunem acum că $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sînt definite pe S şi sînt diferenţiabile în (a,b). Atunci există toate derivatele de ordin doi ale lui f pe S şi există două funcţii $\alpha, \beta : S \to \mathbb{R}$ continue şi nule în (a,b) a.î.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)(y-b) + \tag{7}$$

$$+\alpha(x,y) \cdot \|(x,y) - (a,b)\|, \forall (x,y) \in S,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b) + \tag{8}$$

$$+\beta(x,y)\cdot\|(x,y)-(a,b)\|, \forall (x,y)\in S.$$

Deoarece $(c,y),(c,b)\in S$, din (2) şi (7) obţinem

$$(9)\quad \varphi'(c)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b)(y-b)+\alpha(c,y)\cdot\|(c,y)-(a,b)\|-\alpha(c,b)\cdot|c-a|,$$

şi cum $(x,d),(a,d)\in S$, din (3) şi (8) rezultă

$$(10)\quad \psi'(d)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)(x-a)+\beta(x,d)\cdot\|(x,d)-(a,b)\|-\beta(a,d)\cdot|d-b|.$$

Atunci, din (1), (9) şi (10) rezultă că

$$(11)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b)(y-b)(x-a)+\alpha(c,y)\cdot\|(c,y)-(a,b)\|(x-a)-$$

$$-\alpha(c,b)\cdot|c-a|(x-a)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)(x-a)(y-b)+\beta(x,d)\cdot\|(x,d)-(a,b)\|(y-b)-$$

$-\beta(a,d)\cdot|d-b|(y-b)$.

Împărţim relaţia (11) cu $(x-a)(y-b)$ şi obţinem:

$$(12)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b)+\alpha(c,y)\cdot\frac{\|(c,y)-(a,b)\|}{y-b}-\alpha(c,b)\cdot\frac{|c-a|}{y-b}=$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)+\beta(x,d)\cdot\frac{\|(x,d)-(a,b)\|}{x-a}-\beta(a,d)\cdot\frac{|d-b|}{x-a}.$$

Deoarece (x,y) este arbitrar în S îl putem alege a.î. $|x-a|=|y-b|$; în acest caz $\frac{\|(c,y)-(a,b)\|}{|y-b|}\le\frac{\|(x,y)-(a,b)\|}{|y-b|}\le\sqrt{2}$, $\frac{\|(x,d)-(a,b)\|}{|x-a|}\le\frac{\|(x,y)-(a,b)\|}{|x-a|}\le\sqrt{2}$, $\frac{|c-a|}{|y-b|}\le\frac{|x-a|}{|y-b|}=1$, $\frac{|d-b|}{|x-a|}\le\frac{|y-b|}{|x-a|}=1$.

Putem atunci trece la limită în relaţia (12) pentru $(x,y)\to(a,b)$ cu condiţia că $|x-a|=|y-b|$; deoarece α şi β sînt continue şi nule în (a,b) rezultă că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b).$$

■

3.3.2 Definiţie. *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ o funcţie diferenţiabilă în toate punctele interioare ale mulţimii A; atunci, $\forall h \in \mathbb{R}^k$, putem defini funcţia $g^h : \mathring{A} \to \mathbb{R}^l$ prin $g^h(x) = df(x)(h), \forall x \in \mathring{A}$.*

Dacă, $\forall h \in \mathbb{R}^k$, funcţia g^h este diferenţiabilă în punctul $a \in \mathring{A}$, spunem că funcţia f este **diferenţiabilă de două ori în a**.

Diferenţiala a doua a funcţiei f în a este prin definiţie aplicaţia:

$$d^2f(a) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l, d^2f(a)(h) = dg^h(a)(h), \forall h \in \mathbb{R}^k.$$

În cazul particular $k = 2, l = 1$, $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă de două ori în punctul interior $(a,b) \in \mathring{A}$ dacă, $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$, aplicaţia $g^{(h,k)} : \mathring{A} \to \mathbb{R}$ definită prin $g^{(h,k)}(x,y) = df(x,y)(h,k), \forall (x,y) \in \mathring{A}$, este diferenţiabilă în (a,b).

3.3.3 Propoziţie. *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o aplicaţie diferenţiabilă în toate punctele mulţimii deschise A; f este diferenţiabilă de două ori în $(a,b) \in \mathring{A}$ dacă şi numai dacă $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sînt funcţii diferenţiabile în (a,b).*

În acest caz

$$d^2f(a,b)(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \cdot hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \cdot k^2.$$

Demonstraţie. Să reamintim că, $\forall (x,y) \in \mathring{A}, \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$,

$$g^{(h,k)} : \mathring{A} \to \mathbb{R}, g^{(h,k)}(x,y) = df(x,y)(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot k.$$

Dacă f este diferenţiabilă de două ori în (a,b) atunci, $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, g^{(h,k)}$ este diferenţiabilă în (a,b).

Rezultă că $g^{(1,0)} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $g^{(0,1)} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ sînt diferenţiabile în (a,b).

Reciproc, dacă $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sînt diferenţiabile în (a,b) atunci $\dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot h + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot k$ este diferenţiabilă în (a,b), $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$ (vezi teorema 3.2.22, punctele 1) şi 2)). Rezultă că $g^{(h,k)}$ este diferenţiabilă în (a,b) şi deci f este diferenţiabilă de două ori în (a,b).

În acest caz

$$d^2f(a,b)(h,k) = dg^{(h,k)}(a,b)(h,k) = \frac{\partial g^{(h,k)}}{\partial x}(a,b) \cdot h + \frac{\partial g^{(h,k)}}{\partial y}(a,b) \cdot k =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cdot h + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\cdot k\right)\cdot h + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)\cdot h + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\cdot k\right)\cdot k.$$

Criteriul lui Young ne asigură că derivatele parţiale mixte ale lui f în punctul (a,b) sînt egale; deci:

$$d^2 f(a,b)(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cdot h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\cdot hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\cdot k^2. \quad \blacksquare$$

3.3.4 Observaţii. 1). Ţinînd cont de notaţiile $dx(h,k) = h, dy(h,k) = k$ (vezi observaţia 3.2.7, 3)) putem scrie funcţional relaţia de mai sus:

$$\boxed{d^2 f(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot (dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot (dy)^2}$$

unde toate derivatele de ordin doi ale lui f sînt calculate în punctul (a,b).

2). Fie acum k oarecare şi $l = 1$; presupunem că $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă pe $\mathring{A}$ şi fie $a \in \mathring{A}$. Presupunem că, $\forall h = (h_1, ..., h_k) \in \mathbb{R}^k$ funcţia $g^h : \mathring{A} \to \mathbb{R}, g^h(x) = df(x)(h) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\cdot h_j, \forall x \in \mathring{A}$, este diferenţiabilă în a sau, echivalent, că, $\forall j = 1, ..., k$, funcţia $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\cdot)$ este diferenţiabilă în a. Atunci $d^2 f(a)(h) = dg^h(a)(h) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial g^h}{\partial x_i}(a)\cdot h_i$ de unde

$$\boxed{d^2 f(a)(h) = \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\cdot h_i h_j}$$

Aşa cum se constată diferenţiala a doua este o formă pătratică în h.

Dacă trecem la scrierea funcţională

$$\boxed{d^2 f(a) = \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\cdot dx_i dx_j}$$

3). În cazul general $f = (f_1, ..., f_l) : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l, \forall h \in \mathbb{R}^k$, funcţia $g^h : \mathring{A} \to \mathbb{R}^l$ este definită prin $g^h(x) = df(x)(h) = \begin{pmatrix} df_1(x)(h) \\ \vdots \\ df_l(x)(h) \end{pmatrix}$. Rezultă că funcţia vectorială g^h are componentele scalare $(g_1^h, ..., g_l^h)$ unde, $\forall j = 1, ..., l, g_j^h(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \cdot h_i$. Funcţia g^h este diferenţiabilă în a, $\forall h \in \mathbb{R}^k$, dacă şi numai dacă $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\cdot)$ este diferenţiabilă în a, $\forall i = 1, ..., k, j = 1, ..., l$.

Atunci $d^2 f(a)(h) = dg^h(a)(h) = J_{g^h}(a) \cdot h$. Matricea jacobiană a funcţiei g^h este dată de

$$J_{g^h}(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1^h}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_1^h}{\partial x_k}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_l^h}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_l^h}{\partial x_k}(a) \end{pmatrix}$$

şi deci

$$d^2 f(a)(h) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_i}(a) \cdot h_i & \dots & \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_k \partial x_i}(a) \cdot h_i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 f_l}{\partial x_1 \partial x_i}(a) \cdot h_i & \dots & \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 f_l}{\partial x_k \partial x_i}(a) \cdot h_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix},$$

de unde

$$d^2 f(a)(h) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i h_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 f_l}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i h_j \end{pmatrix}, \forall h \in \mathbb{R}^k.$$

4). Aşa cum am remarcat mai sus la punctele 2) şi 3), diferenţiabilitatea tuturor derivatelor parţiale de ordinul întîi ale unei funcţii într-un punct echivalează cu faptul că funcţia este diferenţiabilă de două ori în acel punct. Atunci putem reformula criteriul lui Young:
Dacă o funcţie este diferenţiabilă de două ori într-un punct atunci derivatele mixte de ordin doi ale funcţiei în acel punct coincid.

5). Observăm o asemănare a formulei care dă diferenţiala a doua cu formula de ridicare la pătrat şi atunci introducem (pentru funcţii scalare de două variabile) notaţia:

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy\right)^{(2)} (f)$$

În formula de mai sus, numărul 2 de la exponent semnifică ridicarea la putere pentru dx şi dy şi derivatele de ordin doi ale lui f pentru $\dfrac{\partial}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial}{\partial y}$.

În cazul general se obţine o formulă de diferenţiere asemănătoare celei din cazul funcţiilor de două variabile

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy\right)^{(n)} (f) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i} \partial y^i} (dx)^{n-i} (dy)^i.$$

De exemplu, pentru $n = 3$ obţinem

$$d^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(dx)^2(dy) + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(dx)(dy)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(dy)^3.$$

O formulă similară, care mimează ridicarea la putere, funcţionează şi în cazul general $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$:

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot dx_k\right)^{(n)} (f).$$

6). Criteriile lui Schwarz şi Young acoperă situaţii diferite. Astfel dacă o funcţie îndeplineşte condiţiile din criteriul lui Young este diferenţiabilă de două ori dar nu rezultă că derivatele sale mixte sînt continue. De asemenea este posibil ca o funcţie să aibă derivate mixte continue într-un punct dar funcţia să nu fie diferenţiabilă de două ori.

O situaţie în care se aplică ambele criterii de egalitate a derivatelor parţiale mixte este prezentată mai jos.

3.3.5 Definiţie. *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă; o funcţie $f : D \to \mathbb{R}^l$ este de clasă C^2 pe D (notaţie: $f \in C^2(D)$) dacă există toate derivatele parţiale de ordin doi ale tuturor funcţiilor de coordonate ale lui f şi acestea sînt continue pe D.*

Similar, spunem că f este de clasă C^n pe D şi notăm $f \in C^n(D)$ dacă funcţiile de coordonate ale lui f au toate derivatele parţiale pînă la ordinul n inclusiv şi acestea sînt continue pe D.

3.3.6 Observaţie. Funcţiile de clasă C^2 pe D îndeplinesc condiţiile din criteriul lui Schwarz dar şi pe acelea ale criteriului lui Young. Într-adevăr, putem aplica criteriul de diferenţiabilitate (teorema 3.2.8) derivatelor parţiale de ordin întîi; rezultă că acestea sînt diferenţiabile pe D. Deci pentru aceste funcţii toate derivatele mixte de ordin doi coincid pe D.

3.3.7 Teoremă. *O funcţie de clasă C^2 pe D este diferenţiabilă de două ori în toate punctele lui D.*

Demonstraţie. Aşa cum am remarcat mai sus, o funcţie de clasă C^2 are derivate parţiale de ordin întîi şi acestea sînt diferenţiabile în toate punctele lui D; de aici rezultă că funcţia este diferenţiabilă de două ori pe D.

În mod similar se obţine:

3.3.8 Teoremă. *O funcţie de clasă C^n pe D este diferenţiabilă de n ori în toate punctele mulţimii D.*

3.4 Formula lui Taylor

Vom începe cu o formă simplă a formulei lui Taylor, formă care este pusă în evidenţă de teorema lui Lagrange.

3.4.1 Teoremă (teorema lui Lagrange). *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă şi convexă şi fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă pe A; atunci, $\forall a, b \in A$, $\exists c \in [a, b]$ a.î.*

$$\boxed{f(b) - f(a) = df(c)(b - a)}$$

Demonstraţie. Deoarece f este diferenţiabilă pe A, din corolarul 3.2.4, 2), f admite derivată în orice punct $a \in A$ pe orice direcţie $u \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ şi $\dfrac{df}{du}(a) = df(a)(u)$.

Din teorema de medie (teorema 3.1.6), $\forall a, b \in A, \exists c \in [a, b]$ a.î.

$$f(b) - f(a) = \frac{df}{d(b-a)}(c)$$

(A este mulţime convexă şi deci condiţia $[a, b] \subseteq A$ este îndeplinită).

Rezultă că $f(b) - f(a) = df(c)(b - a)$. ■

3.4.2 Observaţii. 1). Dacă $a = (a_1, ..., a_k), b = (b_1, ..., b_k)$, relaţia din teoremă se poate scrie dezvoltat (vezi şi observaţia 3.2.7, 1))

$$f(b) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)(b_1 - a_1) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k}(c)(b_k - a_k).$$

Pentru cazul $k = 2$ formula revine la

$$f(b) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(c)(b_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(c)(b_2 - a_2).$$

2). Teorema lui Lagrange se poate reformula:
Fie $a \in A$; $\forall x \in A, \exists c_x \in [a, x]$ a.î.

$$f(x) = f(a) + df(c_x)(x - a).$$

În această variantă obţinem o formulă de tip Taylor de ordin zero cu restul $R_0(f, x) = df(c_x)(x - a)$.

Prezentăm acum formula lui Taylor în forma sa generală.

3.4.3 Teoremă (formula lui Taylor). *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă şi convexă, $a \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă de $(n + 1)$ ori pe A (în particular $f \in C^{n+1}(A)$); $\forall x \in A, \exists c \in [a, x]$ a.î.*

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}df(a)(x-a) + ... + \frac{1}{n!}d^n f(a)(x-a) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(c)(x-a).$$

Demonstraţie. $\forall x \in A, [a, x] \subseteq A$; în plus, deoarece a şi x sînt puncte interioare lui A, $\exists r > 0$ a.î. $S(a, r) \subseteq A$ şi $S(x, r) \subseteq A$. Atunci
$a + t(x - a) \in S(a, r) \subseteq A \Leftrightarrow -\dfrac{r}{\|x - a\|} < t < \dfrac{r}{\|x - a\|}$ iar
$a + t(x - a) \in S(x, r) \subseteq A \Leftrightarrow 1 - \dfrac{r}{\|x - a\|} < t < 1 + \dfrac{r}{\|x - a\|}$; fie intervalul deschis $I = \left] -\dfrac{r}{\|x - a\|}, 1 + \dfrac{r}{\|x - a\|} \right[\subseteq \mathbb{R}$. Definim $\varphi : I \to A$,

$$\varphi(t) = a + t(x - a) = (a_1 + t(x_1 - a_1), ..., a_k + (x_k - a_k)), \forall t \in I;$$

$\varphi(I)$ este un segment deschis din A care conţine segmentul închis $\varphi([0, 1]) = [a, x]$. Funcţia φ este derivabilă pe I (vezi observaţia 3.2.12, 3)) şi

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \vdots \\ \varphi_k'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 + t(x_1 - a_1))' \\ \vdots \\ (a_k + t(x_k - a_k))' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_k - a_k \end{pmatrix} = x - a, \forall t \in I.$$

Rezultă că φ este derivabilă de oricîte ori pe I şi $\varphi^{(n)}(t) = 0 \in \mathbb{R}^k, \forall n \geq 2$.

Să considerăm acum funcţia $h : I \to \mathbb{R}, h = f \circ \varphi$. Aşa cum am constat într-unul dintre cazurile particulare de derivare a funcţiilor compuse (vezi 3.2.25, 2)) h este derivabilă şi, $\forall t \in I$,

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(t)) \cdot \varphi_1'(t) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi(t)) \cdot \varphi_k'(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t)) \cdot (x_i - a_i) = df(\varphi(t))(x - a).$$

Deoarece f este diferenţiabilă de două ori, $\forall i = 1, ..., k$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ este diferenţiabilă şi putem aplica iar formula de derivare a funcţiilor compuse; rezultă că h este derivabilă de două ori şi, $\forall t \in I$,

$$h''(t) = \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi(t)) \cdot (x_i - a_i)(x_j - a_j) = d^2 f(\varphi(t))(x - a).$$

Rezultă din aproape în aproape că h este derivabilă de $(n+1)$ ori pe I şi

$$h^{(i)}(t) = d^i f(\varphi(t))(x - a), \forall t \in I, \forall i = 1, ..., n + 1.$$

Putem atunci să aplicăm funcţiei h formula lui Maclaurin pe intervalul I; cum $0, 1 \in \mathring{I} = I, \exists\ \theta \in]0, 1[$ a.î.

$$h(1) = h(0) + \frac{h'(0)}{1!} + ... + \frac{h^{(n)}(0)}{n!} + \frac{h^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}.$$

Fie atunci $c = \varphi(\theta) \in [a, x]$. Înlocuind în relaţia precedentă
$h(1) = f(x), h(0) = f(a), h^{(i)}(0) = d^i f(a)(x - a), \forall i = 1, ..., n$ şi
$h^{(n+1)}(\theta) = d^{n+1} f(c)(x - a)$,
obţinem formula din enunţul teoremei. ∎

3.4.4 Corolar. *Fie A deschisă şi convexă în $\mathbb{R}^k, a \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă de două ori pe A; atunci, $\forall x \in A, \exists c \in [a, x]$ a.î.*

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c)(x_i - a_i)(x_j - a_j).$$

Demonstraţie. Într-adevăr în acest caz formula lui Taylor se scrie:

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}df(a)(x-a) + \frac{1}{2!}d^2f(c)(x-a)$$

Utilizăm acum formulele care dau diferenţiala de ordin 1 (observaţia 3.2.7, 1)) şi diferenţiala de ordin 2 (observaţia 3.3.24, 3)) şi obţinem relaţia din enunţul corolarului. ∎

3.4.5 Observaţie. În cazul $k = 2$ reformulăm corolarul precedent:
Fie $A \subseteq \mathbb{R}^2$ deschisă şi convexă, $(a,b) \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă de două ori pe A; atunci, $\forall (x,y) \in A, \exists (c,d)$ pe segmentul ce uneşte (a,b) cu (x,y) a.î.

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c,d)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c,d)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c,d)(y-b)^2\right].$$

Capitolul 3

Diferenţiabilitatea funcţiilor de mai multe variabile

3.5 Puncte de extrem

Problema existenţei punctelor de extrem pentru o funcţie reală se rezolvă cu mijloace topologice; de exemplu teorema lui Weierstrass (corolarul 2.3.9) este un instrument util în rezolvarea acestei probleme.

Pentru a găsi efectiv punctele de extrem ale unei funcţii trebuie însă să utilizăm, ca şi în cazul funcţiilor de o variabilă, aparatul diferenţial. Aşa cum vom remarca, diferenţiala întîi ne va oferi condiţii necesare de extrem iar diferenţiala a doua va da condiţii suficiente.

3.5.1 Definiţie. *Fie funcţia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.

Un punct $a \in A$ *este un punct de* **minim local** *pentru* f *dacă există o vecinătate a sa,* $V \in \mathcal{V}(a)$, *a.î.,* $\forall x \in V \cap A, f(x) \geq f(a)$

Un punct $a \in A$ *este un punct de* **maxim local** *pentru* f *dacă există o vecinătate a sa,* $V \in \mathcal{V}(a)$, *a.î.,* $\forall x \in V \cap A, f(x) \leq f(a)$

$a \in A$ *este punct de* **extrem local** *dacă este punct de minim local sau punct de maxim local.*

În cele ce urmează vom detalia condiţiile necesare pentru ca un punct să fie punct de extrem local pentru funcţii de două variabile, marcînd modificările necesare în cazul $k > 2$.

3.5.2 Teoremă (teorema lui Fermat).
Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *şi* $(a,b) \in \mathring{A}$ *un punct de extrem local pentru* f.
1). Dacă f *are derivate parţiale în* (a,b) *atunci acestea sînt nule.*
2). Dacă f *este diferenţiabilă în* (a,b) *atunci* $df(a,b) = \underline{0}$ *ceea ce revine la* $df(a,b)(h,k) = 0, \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$.

Demonstraţie. Fie (a,b) un punct de minim local pentru f.

Deoarece (a,b) este punct interior pentru A şi punct de minim local pentru f putem determina un număr $r > 0$ a.î.

1. $S((a,b),r) \subseteq A$ şi
2. $f(x,y) \geq f(a,b), \forall (x,y) \in S((a,b),r)$.

1). Definim funcţia $g :]a-r, a+r[\to \mathbb{R}$ prin $g(t) = f(t,b), \forall t \in]a-r, a+r[$; observăm că $\forall t \in]a-r, a+r[, (t,b) \in S((a,b),r) \subseteq A$ şi deci funcţia g este bine definită.

Funcţia g verifică ipotezele teoremei lui Fermat pentru funcţii reale de o variabilă reală. Într-adevăr, a este punct interior pentru mulţimea de definiţie a funcţiei g. Din condiţia 2. $g(t) \geq g(a), \forall t \in]a-r, a+r[$; deci a este punct de minim local pentru g. În plus, deoarece f are derivate parţiale în (a,b), g este derivabilă în a şi $g'(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$.

Aplicăm atunci teorema lui Fermat pentru g şi obţinem $g'(a) = 0$.

Rezultă deci că $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$.

În mod asemănător se defineşte $h :]b-r, b+r[\to \mathbb{R}, h(t) = f(a,t), \forall t \in]b-r, b+r[$, şi se arată că $h'(b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

2). Dacă f este diferenţiabilă în (a,b) atunci f are derivate parţiale în (a,b) şi $df(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)dy$. Folosind punctul 1). rezultă că $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ şi deci $df(a,b) = \underline{0}$. ∎

3.5.3 Observaţie. Rezultatul teoremei precedente se extinde evident în cazul $k > 2$. Astfel, dacă $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ are un punct de extrem local în $a \in \mathring{A}$ şi f este diferenţiabilă în a atunci $df(a) = \underline{0}$.

3.5.4 Definiţie. *Fie* $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *şi* $a \in \mathring{A}$ *a.î.* $df(a) = \underline{0}$*; atunci* a *se numeşte* **punct critic** *al funcţiei.*

3.5.5 Observaţii. 1). Teorema lui Fermat spune că punctele de extrem local, interioare mulţimii de definiţie a unei funcţii, se găsesc printre punctele critice ale funcţiei.

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ şi $a \in \mathring{A}$; a este punct critic pentru f dacă $df(a)(h) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i = 0, \forall h = (h_1, ..., h_k) \in \mathbb{R}^k$. Dacă înlocuim, $\forall i = 1, ..., k$, pe h cu e_i, obţinem $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$. Rezultă că a este punct critic pentru f dacă şi numai dacă $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \forall i = 1, ..., k$.

Concluzia este că punctele critice ale lui f se obţin rezolvînd sistemul de k ecuaţii cu k necunoscute

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, ..., x_k) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, ..., x_k) = 0 \end{cases}.$$

2). În cazul $k = 2$ ecuaţia planului tangent într-un punct (a, b) în care funcţia f este diferenţiabilă este

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b).$$

Dacă punctul (a, b) este punct critic atunci $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ şi deci ecuaţia planului tangent revine la $z = f(a, b)$ ceea ce reprezintă un plan paralel cu planul $x0y$.

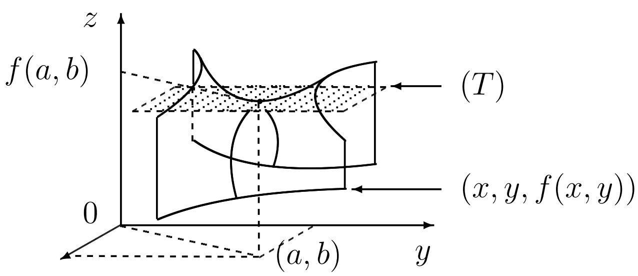
Rezultă că într-un punct de extrem local planul tangent la graficul funcţiei este paralel cu planul $x0y$. Această interpretare geometrică este în concordanţă cu aceea de la funcţii reale de o variabilă; amintim că, în cazul unei funcţii de o variabilă, într-un punct de extrem local tangenta la graficul funcţiei era paralelă cu axa $0x$.

3). Ca şi la funcţii de o variabilă, condiţia ca un punct să fie punct critic este doar o condiţie necesară nu şi suficientă pentru ca el să fie punct de extrem.

Dacă considerăm, de exemplu, funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = xy, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ atunci $\frac{\partial f}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$ şi astfel singurul punct critic al funcţiei f este punctul $(0,0)$. Observăm însă că, în orice vecinătate a originii, se găsesc puncte (x,y) cu $f(x,y) > 0 = f(0,0)$ şi puncte (x,y) cu $f(x,y) < 0 = f(0,0)$. Rezultă că punctul critic $(0,0)$ nu este punct de extrem local.

3.5.6 Definiţie. *Un punct critic care nu este punct de extrem pentru o funcţie f se numeşte punct* **şa** *pentru f.*

Graficul unei funcţii în vecinătatea unui punct şa arată, în cazul $k = 2$, ca în figura de mai jos.



Se observă că, în orice vecinătate a punctului $(a,b,f(a,b))$, graficul funcţiei are puncte situate deasupra şi sub planul tangent(T).

Pentru a selecta punctele de extrem din mulţimea punctelor critice avem nevoie de condiţii suplimentare, condiţii exprimabile prin intermediul diferenţialei a doua. Pentru aceasta vom studia semnul diferenţialei de ordin doi. Remarcăm că rezultatele următoare sînt valabile în cazul mai general al teoriei formelor pătratice.

3.5.7 Definiţie. *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori diferenţiabilă în $a \in \mathring{A}$; diferenţiala a doua, $d^2f(a)$, este* **pozitiv definită** *dacă*

$$d^2f(a)(h) > 0, \forall h \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}.$$

$d^2f(a)$ este **negativ definită** *dacă*

$$d^2f(a)(h) < 0, \forall h \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$$

deci dacă $(-d^2f(a))$ este pozitiv definită.

$d^2f(a)$ este **nedefinită** *dacă $\exists\ h, h' \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ a.î. $d^2f(a)(h) > 0$ şi $d^2f(a)(h') < 0$.*

3.5.8 Observaţie. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă de două ori în $(a, b) \in \mathring{A}$; atunci, după propoziţia 3.3.3, diferenţiala a doua în punctul (a, b) este definită prin:

$$d^2 f(a,b)(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2, \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2.$$

Fie $M = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b), N = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b), P = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b).$

Ţinînd cont că $d^2 f(a,b)(h,k) = Mh^2 + 2Nhk + Pk^2$ este un trinom de gradul doi în h şi k se verifică uşor că:

$$d^2 f(a,b)(h,k) > 0, \forall (h,k) \neq (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} N^2 - M \cdot P < 0, \\ M > 0. \end{cases}$$

Rezultă deci că

$$d^2 f(a,b) \text{ este pozitiv definită } \Leftrightarrow \begin{cases} N^2 - M \cdot P < 0, \\ M > 0. \end{cases}$$

Similar se arată că

$$d^2 f(a,b) \text{ este negativ definită } \Leftrightarrow \begin{cases} N^2 - M \cdot P < 0, \\ M < 0. \end{cases}$$

şi că

$$d^2 f(a,b) \text{ este nedefinită } \Leftrightarrow N^2 - M \cdot P > 0.$$

În cazul general putem demonstra următoarea propoziţie:

3.5.9 Propoziţie. *$d^2 f(a)$ este pozitiv definită dacă şi numai dacă există un număr $m > 0$ a.î.*

$$d^2 f(a)(h) \geq m \cdot \|h\|^2, \forall h \in \mathbb{R}^k.$$

(!) **Demonstraţie**. Suficienţa condiţiei este evidentă; într-adevăr, din relaţia $d^2 f(a)(h) \geq m \cdot \|h\|^2, \forall h \in \mathbb{R}^k$ rezultă că $d^2 f(a)(h) > 0, \forall h \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$.

Să presupunem acum că $d^2 f(a)$ este pozitiv definită.

Fie $C = \{h \in \mathbb{R}^k : \|h\| = 1\}$ "cercul" cu centrul în origine şi rază 1 din $\mathbb{R}^k$; C este mulţime mărginită şi închisă, deci este o mulţime compactă (teorema 1.3.33).

$$d^2f(a) : C \to \mathbb{R}, d^2f(a)(h) = \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j, \forall h = (h_1, ..., h_k) \in C,$$

este o funcţie continuă pe C. Rezultă atunci din teorema lui Weierstrass (corolarul 2.3.9) că există $h^0 \in C$ a.î. $d^2f(a)(h) \geq d^2f(a)(h^0)$. Deoarece $h^0 \neq 0$ ($\|h^0\| = 1$), $m = d^2f(a)(h^0) > 0$.

Fie acum $h \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$; atunci $\dfrac{1}{\|h\|} \cdot h \in C$ de unde rezultă că

$$d^2f(a)\left(\frac{1}{\|h\|} \cdot h\right) \geq m.$$

Dar $d^2f(a)\left(\dfrac{1}{\|h\|} \cdot h\right) = \dfrac{1}{\|h\|^2} \cdot d^2f(a)(h)$ de unde obţinem

$$d^2f(a)(h) \geq m \cdot \|h\|^2, \forall h \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}.$$

Deoarece inegalitatea este evidentă pentru $h = 0$, rezultă că ea este verificată pentru orice $h \in \mathbb{R}^k$. ∎

Sîntem acum în măsură să prezentăm condiţii suficiente de extrem pentru funcţii reale de mai multe variabile.

3.5.10 Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă şi convexă, fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 pe A şi fie $a \in A$ un punct critic pentru f ($df(a) = \underline{0}$).*

1). Dacă $d^2f(a)$ este pozitiv definită atunci a este un punct de minim local pentru f.

2). Dacă $d^2f(a)$ este negativ definită atunci a este un punct de maxim local pentru f.

3). Dacă $d^2f(a)$ este nedefinită atunci a nu este un punct de extrem local pentru f.

Demonstraţie. Aplicăm funcţiei f formula lui Taylor de ordin 1 (corolarul 3.4.4); rezultă că, $\forall x \in A, \exists\, c_x \in [a, x]$ a.î.

$$f(x) - f(a) = df(a)(x - a) + \frac{1}{2} \cdot d^2f(c_x)(x - a).$$

Deoarece a este punct critic pentru f, $df(a) = \underline{0}$ şi astfel relaţia de mai sus se scrie:

$$(1) \quad f(x) - f(a) = \frac{1}{2} \cdot d^2f(a)(x - a) + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left[d^2f(c_x)(x - a) - d^2f(a)(x - a)\right]}_{E}.$$

Fie $x \in A \setminus \{a\}$; vom exprima în alt fel paranteza pătrată E din relaţia (1) de mai sus.

$$E = \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c_x)(x_i - a_i)(x_j - a_j) - \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)(x_i - a_i)(x_j - a_j) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{k} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c_x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right] (x_i - a_i)(x_j - a_j) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{k} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c_x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right] \cdot \frac{x_i - a_i}{\|x - a\|} \cdot \frac{x_j - a_j}{\|x - a\|} \cdot \|x - a\|^2.$$

Definim acum funcţia $\alpha : A \to \mathbb{R}$ prin

$$\alpha(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{k} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c_x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right] \cdot \frac{x_i - a_i}{\|x - a\|} \cdot \frac{x_j - a_j}{\|x - a\|} & , x \neq a \\ 0 & , x = a \end{cases}.$$

Atunci relaţia (1) se scrie

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2} \cdot d^2 f(a)(x - a) + \frac{1}{2} \cdot \alpha(x) \cdot \|x - a\|^2. \tag{2}$$

1). Să presupunem acum că $d^2 f(a)$ este pozitiv definită; din propoziţia 3.5.9, există $m > 0$ a.î. $d^2 f(a)(h) \geq m\|h\|^2, \forall h \in \mathbb{R}^k$. Deoarece $f \in C^2(A)$, $\lim_{x \to 0} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c_x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a), \forall i, j = 1, ..., k$ şi cum $\dfrac{x_i - a_i}{\|x - a\|} \cdot \dfrac{x_j - a_j}{\|x - a\|} \leq 1$ rezultă că $\lim_{x \to a} \alpha(x) = \alpha(a) = 0$.

Atunci există o sferă deschisă $S(a, r)$ a.î., $\forall x \in S(a, r), -\dfrac{m}{2} < \alpha(x) < \dfrac{m}{2}$. Din (2) obţinem

$$f(x) - f(a) \geq \frac{m}{2}\|x - a\|^2 - \frac{m}{4}\|x - a\|^2 = \frac{m}{4}\|x - a\|^2 \geq 0, \forall x \in S(a, r),$$

ceea ce arată că a este un punct de minim local pentru f.

2). Cum $d^2 f(a)$ este negativ definită, $(-d^2 f(a))$ este pozitiv definită şi deci există $m > 0$ a.î. $d^2 f(a)(h) \leq (-m)\|h\|^2, \forall h \in \mathbb{R}^k$. În continuare demonstraţia se face la fel ca la punctul precedent.

3). $d^2f(a)$ fiind nedefinită, există $h, h' \in \mathbb{R}^k$ a.î. $d^2f(a)(h) > 0$ şi $d^2f(a)(h') < 0$. Fie $\delta > 0$ a.î. $\forall t \in (-\delta, \delta), x = a + th, x' = a + th' \in A$ (a este punct interior pentru A).

Înlocuind în relaţia (2) şi ţinînd cont că $d^2f(a)(th) = t^2 d^2f(a)(h), \forall t \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}^k$, obţinem, $\forall t \in (-\delta, \delta)$:

$$f(a+th) - f(a) = \frac{1}{2} \cdot d^2f(a)(h) \cdot t^2 + \frac{1}{2} \cdot \alpha(a+th) \cdot t^2 \cdot \|h\|^2,$$

$$f(a+th') - f(a) = \frac{1}{2} \cdot d^2f(a)(h') \cdot t^2 + \frac{1}{2} \cdot \alpha(a+th') \cdot t^2 \cdot \|h'\|^2.$$

Deoarece $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$, putem găsi r a.î. $0 < r < \delta$ şi $\forall t \in (-r, r)$, $-\frac{1}{2} \cdot d^2f(a)(h) < \alpha(a+th) \cdot \|h\|^2$ iar $\alpha(a+th') \cdot \|h'\|^2 < -\frac{1}{2} \cdot d^2f(a)(h')$. Rezultă atunci că $\forall t \in (-r, r)$,

$$f(a+th) - f(a) > \frac{1}{4} \cdot d^2f(a)(h) \cdot t^2 > 0$$

iar

$$f(a+th') - f(a) < \frac{1}{4} \cdot d^2f(a)(h') \cdot t^2 < 0.$$

Deci în orice vecinătate a punctului a găsim şi valori ale lui f mai mari ca $f(a)$ şi valori mai mici ca $f(a)$. Rezultă că a nu este punct de extrem local pentru f. ■

În cazul particular $k = 2$ condiţiile din teorema precedentă se pot pune sub o formă uşor de verificat în cazuri concrete.

3.5.11 Corolar. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă şi convexă, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 pe A şi fie $(a, b) \in A$ un punct critic pentru f.*

Notăm $M = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), N = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b), P = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$.

1). Dacă $N^2 - MP < 0$ şi $M > 0$ atunci (a, b) este punct de minim local.

2). Dacă $N^2 - MP < 0$ şi $M < 0$ atunci (a, b) este punct de maxim local.

3). Dacă $N^2 - MP > 0$ atunci (a, b) nu este punct de extrem local.

Demonstraţie. Concluzia corolarului rezultă din teorema precedentă şi din observaţia 3.5.8.

Vom da în cazul general, fără demonstraţie, condiţii suficiente de extrem.

3.5.12 Definiţie. *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă de două ori în $a \in \mathring{A}$; atunci matricea*

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(a) \end{pmatrix}$$

se numeşte **hessiana** *lui f în a (*de la numele matematicianului german Ludwig Otto Hess (1811-1874)).

3.5.13 Corolar (condiţiile lui Sylvester[1]). *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă şi convexă, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 pe A, $a \in A$ un punct critic pentru f şi* $d_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a), d_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) \end{vmatrix}, ..., d_k = \det(H_f(a))$, *minorii principali ai matricii hessiene.*

1). Dacă $d_1, d_2, ..., d_k$ sînt toţi pozitivi atunci a este un punct de minim local pentru f.

2). Dacă $-d_1, d_2, ..., (-1)^k d_k$ sînt toţi pozitivi atunci a este un punct de maxim local pentru f.

Sînt situaţii în care, aşa cum vom remarca în exemplul următor, corolarul precedent nu este aplicabil.

3.5.14 Exemplu. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz, \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pentru a găsi punctele critice ale funcţiei f rezolvăm sistemul obţinut din anularea derivatelor parţiale ale funcţiei.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 - 5yz = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 5y^4 - 5xz = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 5z^4 - 5xy = 0 \end{cases}.$$

[1] James Joseph Sylvester (1814-1897), matematician englez.

Mulţimea soluţiilor sistemului este $S = \{(1,1,1), (-1,-1,-1), (0,0,0)\}$.

Derivatele parţiale de ordin doi sînt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 20x^3 & , \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -5z \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 20y^3 & , \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -5y \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 20z^3 & , \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -5x \end{cases} .$$

Deci matricea hessiană asociată lui f în punctul critic $(1,1,1) \in A$ este $H_1 = \begin{pmatrix} 20 & -5 & -5 \\ -5 & 20 & -5 \\ -5 & -5 & 20 \end{pmatrix}$. Minorii principali ai acestei matrici sînt pozitivi deci $(1,1,1)$ este un punct de minim local pentru f.

Matricea hessiană asociată lui f în punctul critic $(-1,-1,-1) \in A$ este $H_2 = \begin{pmatrix} -20 & 5 & 5 \\ 5 & -20 & 5 \\ 5 & 5 & -20 \end{pmatrix}$. Aici $d_1 < 0, d_2 > 0$ iar $d_3 < 0$. Deci $(-1,-1,-1)$ este un punct de maxim local pentru f.

Matricea hessiană în $(0,0,0)$ este matricea nulă; deci corolarul precedent nu poate preciza natura acestui punct critic.

$f(0,0,0) = 0$ iar $f(x,x,x) = 3x^5 - 5x^3 = x^3(3x^2 - 5)$. Se observă că, pe orice vecinătate V a originii şi $\forall (x,x,x) \in V$, $f(x,x,x)$ ia valori pozitive dacă $x < 0$ şi valori negative dacă $x > 0$. Rezultă că acest punct critic este un punct şa.

Capitolul 3

Diferenţiabilitatea funcţiilor de mai multe variabile

3.6 Teorema de inversare locală

Vom prezenta întâi câteva proprietăţi legate de inversarea operatorilor liniari.

3.6.1 Propoziţie. *Fie $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ un operator liniar şi fie A_T matricea asociată ($T(x) = A_T \cdot x, \forall x \in \mathbb{R}^k$).*

a). Dacă T este injectiv atunci $k \leq l$.

b). T este bijectiv dacă şi numai dacă $k = l$ şi A_T este nesingulară.

Demonstraţie. a). Am arătat că un operator liniar T este injectiv dacă şi numai dacă $T(x) = 0_{\mathbb{R}^l} \Longrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^k}$. Ecuaţia vectorială $T(x) = 0_{\mathbb{R}^l}$ este echivalentă cu $A_T \cdot x = 0_{\mathbb{R}^l}$ sau, dacă $A_T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{lk} \end{pmatrix}$, cu sistemul

$$(S) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1k}x_k = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{l1}x_1 + \cdots + a_{lk}x_k = 0 \end{cases}$$

În general acest sistem are ∞^{k-r} soluţii, unde $r = \text{rang}A_T$; această notaţie vrea să spună că soluţia generală a sistemului depinde de $k - r$ parametri care variază independent în $\mathbb{R}$.

Deoarece sistemul (S) are soluţia unică $x = 0_{\mathbb{R}^k}$ rezultă $k = r \leq \min\{k, l\}$ de unde $k \leq l$.

b). Necesitatea. Fie T un operator liniar bijectiv; atunci T este injectiv şi $T^{-1} : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k$ este de asemenea operator liniar şi injectiv. Rezultă din a) $k \leq l$ şi $l \leq k$, deci $k = l$.

Matricea A_T este deci în acest caz patratică şi pentru ca sistemul (S) să aibă soluţie unică trebuie ca $\det A_T \neq 0$ şi deci A_T este nesingulară.

Suficienţa. Fie $k = l$ şi A_T matrice nesingulară. Atunci sistemul (S) are numai soluţia banală ceea ce ne asigură că T este injectiv.

Oricare ar fi $y = (y_1, \cdots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ sistemul

$$(S') \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1k}x_k = y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kk}x_k = y_k \end{cases}$$

are, conform teoremei lui Cramer, soluţie unică. Deci, oricare ar fi $y \in \mathbb{R}^k$ există $x \in \mathbb{R}^k$ aşa fel încât $T(x) = y$ ceea ce arată că T este surjectiv.

Deci T este un operator liniar şi bijectiv. ∎

3.6.2 Observaţie. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^k, a \in \mathring{A}$ şi $f : A \to \mathbb{R}^l, f = (f_1, \cdots, f_l)$, o funcţie diferenţiabilă în a. Diferenţiala funcţiei f în a, $df(a) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$, este un operator liniar a cărei matrice asociată este matricea jacobiană a lui f în a: $J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial x_k}(a) \end{pmatrix}$. Propoziţia precedentă ne asigură că $df(a)$ este bijectiv dacă şi numai dacă $k = l$ şi $J_f(a)$ este nesingulară; aceasta înseamnă că jacobianul lui f în a, $\dfrac{D(f_1, \cdots, f_k)}{D(x_1, \cdots, x_k)}(a) = \det J_f(a)$, este diferit de zero.

3.6.3 Definiţie. Fie U şi V două mulţimi deschise din $\mathbb{R}^k$; o aplicaţie $f : U \to V$ se numeşte **difeomorfism** sau **izomorfism diferenţial** între mulţimile U şi V dacă f este bijectivă, $f \in C^1(U)$ şi $f^{-1} \in C^1(V)$.

3.6.4 Observaţie. Criteriul de diferenţiabilitate ne asigură că orice difeomorfism între două mulţimi deschise U şi V este o aplicaţie diferenţiabilă în toate punctele mulţimii U; inversa acestei aplicaţii este de asemenea difeomorfism între V şi U şi deci este diferenţiabilă pe V.

Teorema următoare caracterizează difeomorfismele utilizând proprietatea de bijectivitate a diferenţialei.

3.6.5 Teoremă. *Fie U şi V doi deschişi din $\mathbb{R}^k$ şi fie $f : U \to V$ o aplicaţie bijectivă de clasă C^1 pe U ($f \in C^1(U)$).*

Funcţia f este un difeomorfism între U şi V dacă şi numai dacă

1. $f^{-1} : V \to U$ este continuă pe V şi

2. $df(a) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ este operator liniar şi bijectiv, oricare ar fi $a \in U$.

Demonstraţie. Necesitatea. Dacă f este difeomorfism între U şi V atunci, din observaţia precedentă, $f^{-1} : V \to U$ este diferenţiabilă pe V şi deci este continuă pe V.

$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_U : U \to U, \mathrm{id}_U(x) = x, \forall x \in U$ (aplicaţia identică pe U); id_U este diferenţiabilă pe U şi, oricare ar fi $a \in U, d(\mathrm{id}_U)(a) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ este aplicaţia identică pe $\mathbb{R}^k$ ($\mathrm{id}_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k}(h) = h, \forall h \in \mathbb{R}^k$). Matricea asociată acestui operator liniar (matricea jacobiană a sa) este matricea unitate $I_k = \begin{pmatrix} 1 \cdots 0 \\ \cdots \\ 0 \cdots 1 \end{pmatrix}$.

Deoarece f şi f^{-1} sunt diferenţiabile (f este difeomorfism) putem aplica formula de diferenţiere a funcţiilor compuse:

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^k} = d(\mathrm{id}_U)(a) = d(f^{-1})(f(a)) \circ df(a).$$

Matricile jacobiene asociate acestor operatori se vor găsi atunci în relaţia:

$$I_k = J_{f^{-1}}(f(a)) \cdot J_f(a),$$

de unde

$$1 = \det I_k = \det J_{f^{-1}}(f(a)) \cdot \det J_f(a).$$

De aici rezultă că $\det J_f(a) \neq 0$ şi deci că $J_f(a)$ este nesingulară. Observaţia 3.6.2 ne asigură atunci că $df(a) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ este operator liniar şi bijectiv.

Suficienţa. Fie $f : U \to V$ o bijecţie de clasă C^1 pe U astfel încât f^{-1} este continuă pe V şi, oricare ar fi $a \in U$, $df(a) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ este operator liniar şi bijectiv. Pentru a demonstra că f este difeomorfism între U şi V este suficient să arătăm că $f^{-1} \in C^1(V)$.

Vom demonstra întâi că f^{-1} este diferenţiabilă pe V.

Fie $b \in V$ un punct arbitrar şi fie $a = f^{-1}(b) \in U$; deoarece $f \in C^1(U), f$ este diferenţiabilă pe U şi deci f este diferenţiabilă în a. Rezultă că există $\alpha : U \to \mathbb{R}^k$ continuă şi nulă în a astfel încât

$$f(x) = f(a) + df(a)(x - a) + ||x - a|| \cdot \alpha(x), \forall x \in U. \tag{1}$$

Vom nota $df(a) = T$; din ipoteză T este un operator liniar şi bijectiv pe $\mathbb{R}^k$.

Oricare ar fi $y \in V$ există $x \in U$ astfel încât $f(x) = y$ şi atunci, din (1), obţinem:

$$(2) \qquad y - b = T(x - a) + ||x - a|| \cdot \alpha(x).$$

Aplicaţia $T^{-1} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ este de asemenea operator liniar şi, aplicând T^{-1} în relaţia (2), obţinem:

$$(3) \qquad T^{-1}(y) - T^{-1}(b) = x - a + ||x - a|| \cdot T^{-1}(\alpha(x)),$$

sau

$$(4) \qquad x - a = T^{-1}(y) - T^{-1}(b) - ||x - a|| \cdot T^{-1}(\alpha(x)).$$

Deoarece T^{-1} este aplicaţie liniară ea este lipschitziană şi deci există o constantă $L > 0$ astfel încât $||T^{-1}(y) - T^{-1}(b)|| \leq L \cdot ||y - b||$. Aplicând norma în relaţia (4) şi folosind inegalitatea precedentă obţinem:

$$||x - a|| \leq L \cdot ||y - b|| + ||x - a|| \cdot ||T^{-1}(\alpha(x))||,$$

de unde

$$(5) \qquad \frac{||x - a||}{||y - b||} \leq \frac{L}{1 - ||T^{-1}(\alpha(x))||}.$$

Observăm că $x = f^{-1}(y)$ şi, deoarece f^{-1} este continuă, $y \to b \Longrightarrow x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(b) = a$; atunci

$$(6) \qquad \lim_{y \to b} ||T^{-1}(\alpha(x))|| = ||T^{-1}(\alpha(a))|| = 0$$

şi deci există $\delta > 0$ astfel încât

$$||T^{-1}(\alpha(f^{-1}(y)))|| < \frac{1}{2}, \forall y \in S(b, \delta).$$

Din (5) rezultă

$$(7) \qquad \frac{||x - a||}{||y - b||} < 2L, \forall y \in S(b, \delta).$$

Relaţia (4) se poate rescrie

$$(8) \qquad f^{-1}(y) = f^{-1}(b) + T^{-1}(y - b) - ||x - a|| \cdot T^{-1}(\alpha(x)).$$

Fie funcţia $\beta : V \to \mathbb{R}^k$ definită prin

$$\beta(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{||y-b||} \cdot \left[f^{-1}(y) - f^{-1}(b) - T^{-1}(y-b)\right] & , y \neq b \\ 0 & , y = b \end{cases}.$$

Atunci, din (7),

$$\beta(y) = -\frac{||x-a||}{||y-b||} \cdot T^{-1}(\alpha(x)). \tag{9}$$

Din (6) şi (7) rezultă că $\lim_{y \to b} \beta(y) = 0 = \beta(b)$ iar din definiţia lui β

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(b) + T^{-1}(y-b) + ||y-b|| \cdot \beta(y), \forall y \in V, \tag{10}$$

ceea ce arată că f^{-1} este diferenţiabilă în în b, oricare ar fi $b \in V$. Deci f^{-1} este diferenţiabilă pe V.

Deoarece $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_V$, aplicând formula de diferenţiere a compunerii,

$$J_f(f^{-1}(y)) \cdot J_{f^{-1}}(y) = I_k, \forall y \in V. \tag{11}$$

Deoarece $df(f^{-1}(y))$ este bijectivă, $J_f(f^{-1}(y))$ este nesingulară şi deci inversabilă. Din relaţia (11) deducem:

$$J_{f^{-1}}(y) = \left[J_f\left(f^{-1}(y)\right)\right]^{-1}, \forall y \in V. \tag{12}$$

Elementele matricii $J_f(f^{-1}(y))$ sunt de forma $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} \circ f^{-1}\right)(y)$; f^{-1} fiind continuă, acestea vor fi funcţii continue de variabila y, oricare ar fi $i, j = 1, \cdots, k$ (am notat $f = (f_1, \cdots, f_k)$ şi am ţinut cont că $f \in C^1(U)$, deci că $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ sunt continue pe U). Ţinând cont de modul în care se construieşte inversa unei matrici rezultă din (12) că elementele matricii $J_{f^{-1}}(y)$ sunt funcţii continue de y pe V deci că $f^{-1} \in C^1(V)$.

Astfel rezultă că f este un difeomorfism între deschişii U şi V. ∎

3.6.6 Observaţie. Relaţia (12) din demonstraţia teoremei precedente ne arată că, oricare ar fi $y \in V$, $df^{-1}(y) = \left[df(f^{-1}(y))\right]^{-1}$.

În general aplicaţiile $f : U \to V$ pe care le întâlnim în practică nu sunt aplicaţii bijective astfel încât nu este în general posibil să definim inversa lui f pe mulţimea V. Ne punem problema dacă această funcţie nu poate fi inversată măcar local, pe vecinătatea unor puncte din U. Teorema următoare dă condiţii suficiente în care o astfel de inversare locală este posibilă.

3.6.7 Teoremă (teorema de inversare locală). *Fie D un deschis din $\mathbb{R}^k$ şi fie $f : D \to \mathbb{R}^k, f \in C^1(D)$.*

Dacă $a \in D$ este un punct în care $df(a) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ este bijectivă atunci există o mulţime deschisă U în $\mathbb{R}^k$, $a \in U \subseteq D$, aşa fel încât $V = f(U)$ este deschisă şi f este un difeomorfism între U şi V.

Demonstraţia teoremei precedente este destul de laborioasă şi nu o vom prezenta.

3.6.8 Observaţii. (i) Să remarcăm că, în ipotezele teoremei, f este inversabilă local pe U şi f^{-1} este de clasă C^1 pe mulţimea deschisă V, vecinătate a punctului $f(a)$. Oricare ar fi $y \in V$, există un punct unic $x \in U$ aşa fel încât $f(x) = y$; f este diferenţiabilă pe U şi atunci, din teorema 3.6.5, $df(x)$ este o bijecţie.

(ii) Să presupunem $k = 1$; în acest caz $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este de clasă C^1 pe D dacă f este derivabilă şi are derivată continuă pe D. Fie $a \in D$ astfel încât $df(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ să fie bijectivă. Deoarece $df(a)(h) = f'(a) \cdot h, \forall h \in \mathbb{R}$, $df(a)$ este bijectivă dacă şi numai dacă $f'(a) \neq 0$. Deci în acest caz teorema precedentă se formulează astfel: *Dacă f este de clasă C^1 pe D atunci pentru orice punct $a \in D$ pentru care $f'(a) \neq 0$ există o vecinătate deschisă U aşa fel încât restricţia lui f la U este inversabilă şi are inversa derivabilă. În plus $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.*

3.6.9 Exemplu. Să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = y_1 \\ x_1^2 - x_2^2 = y_2 \end{cases}$$

unde y_1, y_2 sunt numere arbitrare în $\mathbb{R}$ dar fixate.

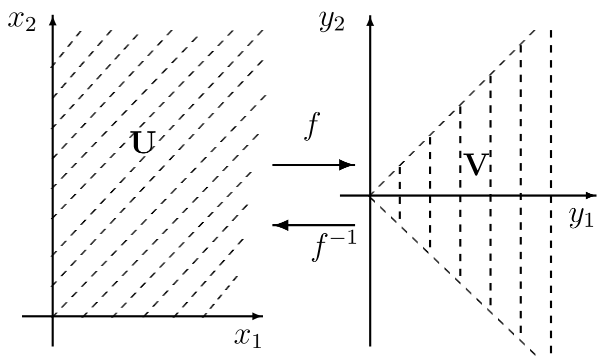
Sistemul de mai sus poate fi transformat într-o ecuaţie vectorială. Definim $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ prin $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2, x_1^2 - x_2^2)$ şi atunci sistemul de mai sus este echivalent cu ecuaţia vectorială $f(x) = y$, unde $x = (x_1, x_2)$ iar $y = (y_1, y_2)$.

Observăm că $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ şi că

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{pmatrix}, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Rezultă că $df(a)$ este bijectivă dacă şi numai dacă $J_f(a)$ este nesingulară ceea ce revine la $-8a_1a_2 \neq 0$ $(a = (a_1, a_2))$. Deci $df(a)$ este bijectivă dacă şi numai dacă a nu se găseşte pe axele de coordonate.

Să luăm un punct a din cadranul I ($a_1 > 0, a_2 > 0$); atunci putem considera $U = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ (întreg cadranul I). Din sistem rezultă că $\frac{y_1+y_2}{2} = x_1^2 > 0$ şi $\frac{y_1-y_2}{2} = x_2^2 > 0$; de aici $f(U) = V$ unde $V = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : -y_1 < y_2 < y_1\}$.



Restricţia funcţiei f la U este inversabilă şi $f^{-1} : V \to U$ este definită prin

$$f^{-1}(y_1, y_2) = \left(\sqrt{\frac{y_1 + y_2}{2}}, \sqrt{\frac{y_1 - y_2}{2}} \right).$$

3.7 Funcţii definite implicit

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^2, F : A \to \mathbb{R}$ şi $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$ a.î. $F(x_0, y_0) = 0$. Ne punem problema găsirii de condiţii în care, local (pe o vecinătate a punctului (x_0, y_0)), să putem rezolva ecuaţia $F(x, y) = 0$ obţinîndu-l pe y funcţie de x.

Mai exact, ne interesează în ce condiţii putem găsi două intervale deschise $I, J \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I, y_0 \in J, I \times J \subseteq A$ şi o funcţie $\varphi : I \to J$ a.î.

$$\{(x, y) \in I \times J : F(x, y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)) : x \in I\}.$$

Observăm că membrul doi din relaţia de mai sus este graficul funcţiei φ; astfel problema se poate formula astfel: în ce condiţii mulţimea $\{(x, y) \in I \times J : F(x, y) = 0\}$ reprezintă graficul unei funcţii ?

În cazul în care există o astfel de funcţie φ ea se numeşte funcţie definită **implicit** sau funcţie **implicită**.

Ne interesează deci să vedem în ce condiţii ecuaţia $F(x, y) = 0$ defineşte local o funcţie implicită; în cazul în care această funcţie există, este ea derivabilă ?

Exemplul următor arată că nu putem explicita ecuaţia $F(x,y) = 0$ în vecinătatea oricărui punct.

3.7.1 Exemplu. Fie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, F(x,y) = x^2 + y^2 - 1, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1). Fie $(x_0, y_0) = (0,1)$ atunci există $I = (-1,1), J = (0,2)$, $0 \in I, 1 \in J$ şi există funcţia $\varphi : I \to J, \varphi(x) = \sqrt{1-x^2}, \forall x \in I$ a.î.

$$\{(x,y) \in I \times J : F(x,y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)) : x \in I\}.$$

2). Fie acum $(x_0, y_0) = (1,0)$; să presupunem că există intervalele deschise $I, J \subseteq \mathbb{R}, 1 \in I, 0 \in J$ şi că există o funcţie $\varphi : I \to J$ a.î.
$\{(x,y) \in I \times J : F(x,y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)) : x \in I\}$.

Atunci există $n \in \mathbb{N}$ a.î., $x_n = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \in I$, iar $-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \in J$ şi astfel $(x_n, -\frac{1}{n}), (x_n, \frac{1}{n}) \in \{(x,y) \in I \times J : F(x,y) = 0\}$;
rezultă atunci că $\varphi(x_n) = -\frac{1}{n}$ şi $\varphi(x_n) = \frac{1}{n}$, ceea ce este absurd.

Formulăm următoarea teoremă de existenţă şi derivabilitate pentru funcţii de o variabilă definite implicit.

3.7.2 Teoremă (teorema funcţiilor implicite). *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă, $F : D \to \mathbb{R}$ şi $(x_0, y_0) \in D$ a.î. să fie verificate următoarele condiţii:*

1). $F(x_0, y_0) = 0$,

2). $F \in C^1(D)$,

3). $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Atunci există intervalele deschise $I, J \subseteq \mathbb{R}$ cu $(x_0, y_0) \in I \times J \subseteq D$ şi există o funcţie $\varphi : I \to J$ cu proprietăţile:

a). $\{(x,y) \in I \times J : F(x,y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)) : x \in I\}$,

b). φ este de clasă C^1 pe I şi, $\forall x \in I$,

$$\varphi'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}.$$

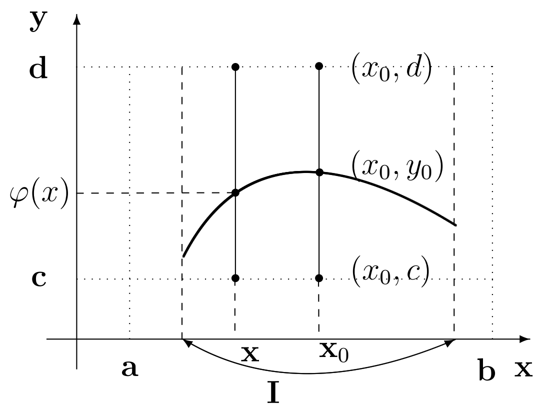
Demonstraţie. Vom prezenta două demonstraţii pentru această teoremă.

I. Prima demonstraţie se bazează pe proprietatea de semn local a funcţiilor continue şi pe proprietatea lui Darboux (o funcţie continuă care ia valori de semn contrar la capetele unui interval se anulează pe acel interval).

Deoarece $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ este continuă pe D şi $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ atunci există o vecinătate a lui (x_0, y_0) pe care $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ are acelaşi semn ca în (x_0, y_0); să presupunem că acest semn este pozitiv.

Fie deci $I_1 = [a, b]$ şi $J = [c, d]$ astfel încât

$$(x_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d) \subseteq I_1 \times J \subseteq D \text{ şi } \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0, \forall (x, y) \in (a, b) \times (c, d).$$



Fie $g : [c, d] \to \mathbb{R},\ g(y) = F(x_0, y)$; atunci g este derivabilă pe $[c, d]$ şi $g'(y) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y), \forall y \in [c, d]$.

Rezultă că funcţia g este strict crescătoare pe $[c, d]$ şi, cum $g(y_0) = F(x_0, y_0) = 0$, $g(c) < 0 < g(d)$.

Funcţiile $h_c, h_d : [a, b] \to \mathbb{R}, h_c(x) = F(x, c), h_d(x) = F(x, d), \forall x \in [a, b]$ sunt continue şi

$$h_c(x_0) = F(x_0, c) = g(c) < 0 < g(d) = F(x_0, d) = h_d(x_0).$$

Rezultă că există o vecinătate a punctului x_0 pe care funcţia h_c este negativă şi h_d este pozitivă. Fie deci I un interval deschis a.î. $x_0 \in I \subseteq (a, b)$ şi

$$F(x, c) = h_c(x) < 0 < h_d(x) = F(x, d), \forall x \in I.$$

Deoarece pentru orice $x \in I$ $F(x, \cdot)$ este o funcţie continuă există $\varphi(x) \in (c, d)$ astfel încât $F(x, \varphi(x)) = 0$. Pe de altă parte $I \times (c, d) \subseteq (a, b) \times (c, d)$ şi deci,

$\forall x \in I$,

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) > 0, \forall y \in [c,d].$$

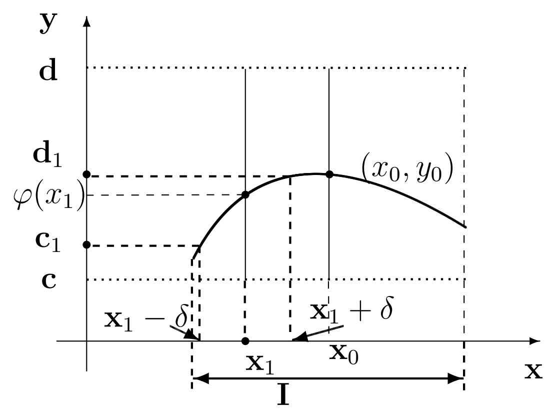
Atunci $F(x,\cdot)$ este strict crescătoare pe $[c,d]$ şi deci $\varphi(x) = y$ este singurul punct din intervalul $[c,d]$ pentru care $F(x,y) = 0$.

Astfel am pus în evidenţă o funcţie $\varphi : I \to J = (c,d)$ aşa fel încât, oricare ar fi $(x,y) \in I \times J, F(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y = \varphi(x)$ ceea ce este echivalent cu egalitatea:

$$\{(x,y) \in I \times J : F(x,y) = 0\} = \{(x,\varphi(x)) : x \in I\}.$$

Să demonstrăm întâi că φ este continuă pe I.

Fie $x_1 \in I, \varepsilon > 0$ şi $c_1 = \varphi(x_1) - \varepsilon, d_1 = \varphi(x_1) + \varepsilon$



Din discuţia făcută mai sus asupra semnului lui F rezultă $F(x_1,c_1) < 0 < F(x_1,d_1)$. Utilizând iarăşi proprietatea de semn local a funcţiilor continue, există $\delta > 0$ aşa fel încât oricare ar fi $x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta), F(x,c_1) < 0 = F(x,\varphi(x)) < F(x,d_1)$ şi atunci $c_1 = \varphi(x_1) - \varepsilon < \varphi(x) < \varphi(x_1) + \varepsilon = d_1$ sau $|\varphi(x) - \varphi(x_1)| < \varepsilon$. Rezultă că φ este continuă în x_1 şi deci, cum x_1 este arbitrar în I, φ este continuă pe I.

Să arătăm acum că φ este derivabilă pe I.

Fixăm un punct $x_1 \in I$ şi fie $y_1 = \varphi(x_1)$; $(x_1,y_1) \in I \times J \subseteq D$ şi deoarece $F \in C^1(D)$, F este diferenţiabilă în (x_1,y_1). Deci există o funcţie $\alpha : D \to \mathbb{R}$ continuă şi nulă în (x_1,y_1) astfel încât

$$F(x,y) = F(x_1,y_1) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_1,y_1)\cdot(x-x_1) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_1,y_1)\cdot(y-y_1)+$$

$$+\alpha(x,y)\cdot\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}, \forall(x,y) \in D.$$

În particular, oricare ar fi $x \in I, (x, \varphi(x)) \in D$ şi deci, înlocuind în relaţia precedentă pe y cu $\varphi(x)$ şi ţinând cont că $F(x, \varphi(x)) = 0 = F(x_1, y_1)$, obţinem

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x_1, y_1) \cdot (x - x_1) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_1, y_1) \cdot (\varphi(x) - \varphi(x_1)) +$$

$$+\alpha(x, \varphi(x)) \cdot \sqrt{(x - x_1)^2 + (\varphi(x) - \varphi(x_1))^2}, \forall x \in I$$

şi, cum $\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, y_1) > 0$,

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_1)}{x - x_1} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_1, y_1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, y_1)} - \gamma(x), \text{ unde}$$

$$\gamma(x) = \frac{\alpha(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, y_1)} \cdot \frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + (\varphi(x) - \varphi(x_1))^2}}{x - x_1}.$$

Evident $|\gamma(x)| \leq \frac{|\alpha(x, \varphi(x))|}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, y_1)}, \forall x \in I$. Deoarece φ este continuă, $\lim_{x \to x_1} \varphi(x) = \varphi(x_1) = y_1$ şi deci $\lim_{x \to x_1} \alpha(x, \varphi(x)) = \alpha(x_1, y_1) = 0$; rezultă că $\lim_{x \to x_1} \gamma(x) = 0$ şi deci

$$\lim_{x \to x_1} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_1)}{x - x_1} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_1, y_1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, y_1)}.$$

Cum x_1 este arbitrar în I, φ este derivabilă pe I şi

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}, \forall x \in I.$$

Să observăm că φ este continuă pe I şi că $\frac{\partial F}{\partial x}$ şi $\frac{\partial F}{\partial y}$ sunt continue pe d; atunci φ' este continuă pe I şi deci $\varphi \in C^1(I)$.

(!) II. Vom prezenta acum o demonstraţie bazată pe teorema de inversare locală.

Fie $f : D \to \mathbb{R}^2$ funcţia definită prin $f(x, y) = (x, F(x, y))$, oricare ar fi $(x, y) \in D$. Observăm că $f \in C^1(D), f(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ şi

$$\det\left(J_f(x_0, y_0)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Rezultă că $J_f(x_0, y_0)$ este nedegenerată şi deci că $df(x_0, y_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ este un operator liniar şi bijectiv. Conform teoremei de inversare locală există un deschis $U \subseteq \mathbb{R}^2$ astfel încât $(x_0, y_0) \in U \subseteq D, V = f(U)$ este un deschis din $\mathbb{R}^2$ şi f este un difeomorfism între U şi V.

Putem presupune fără să restrângem generalitatea că U este un produs cartezian de două intervale deschise $U = I' \times J, x_0 \in I'$ şi $y_0 \in J$.

Deoarece V este deschisă şi $f(x_0, y_0) = (x_0, 0) \in V$, există un interval deschis $I_1 \subseteq I'$ şi un interval deschis J_1 astfel încât $(x_0, 0) \in I_1 \times J_1 \subseteq V$.

$(x_0, y_0) = f^{-1}(x_0, 0) \subseteq f^{-1}(I_1 \times J_1) \subseteq U$.

Deoarece f este aplicaţie continuă, $f^{-1}(I_1 \times J_1)$ este o mulţime deschisă şi deci există I - un interval deschis - astfel încât $x_0 \in I \subseteq I_1$ şi există un interval deschis J' aşa fel încât $(x_0, y_0) \in I \times J' \subseteq f^{-1}(I_1 \times J_1)$.

Fie $p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p_2(u, v) = v, \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$ (proiecţia pe coordonata a doua). Atunci p_2 este operator liniar şi deci este diferenţiabil pe $\mathbb{R}^2$.

Oricare ar fi $x \in I$, $(x, 0) \in I \times J_1 \subseteq I_1 \times J_1$, de unde

$$f^{-1}(x, 0) \in f^{-1}(I_1 \times J_1) \subseteq U = I' \times J$$

şi deci $p_2(f^{-1}(x, 0)) \in J$.

Definim atunci $\varphi : I \to J$ prin $\varphi(x) = p_2(f^{-1}(x, 0)), \forall x \in I$.

Pentru orice $(x, y) \in I \times J, F(x, y) = 0 \iff f(x, y) = (x, 0) \iff (x, y) = f^{-1}(x, 0) \iff y = p_2(x, y) = p_2(f^{-1}(x, 0)) = \varphi(x) \iff (x, y) = (x, \varphi(x))$, pentru orice $x \in I$.

Deci φ verifică condiţia a) din concluzia teoremei. În plus, oricare ar fi $x \in I$, $F(x, \varphi(x)) = 0$. Deoarece φ este o compunere de funcţii diferenţiabile ($\varphi = p_2 \circ f^{-1} \circ g$, unde $g : I \to I \times J_1, g(x) = (x, 0)$) ea este derivabilă şi deci putem deriva relaţia de mai sus după x; obţinem:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0$$

de unde găsim şi relaţia b) din concluzia teoremei.

$F \in C^1(D)$ ceea ce antrenează continuitatea lui φ' pe I. ∎

3.7.3 Observaţii. 1). În exemplul 3.7.1, 2) nu este verificată condiţia 3). din teorema precedentă; într-adevăr, $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = 2y|_{y=0} = 0$ şi, aşa cum am văzut, nu este posibilă explicitarea ecuaţiei $F(x, y) = 0$ în $(1, 0)$.

2). Dacă $F \in C^2(D)$ atunci funcţia φ este de clasă C^2 pe I; derivata a doua se obţine folosind formula de derivare a funcţiilor compuse în relaţia care dă derivata lui φ.

$$\varphi''(x) = -\frac{\left[\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \cdot \varphi'(x)\right] \cdot \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\partial F}{\partial x} \cdot \left[\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \varphi'(x)\right]}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2}.$$

Dacă în formula de mai sus înlocuim valoarea derivatei lui φ obţinem:

$$\varphi''(x) = -\frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \dfrac{\partial F}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^3}$$

unde toate derivatele parţiale ale lui F sînt calculate în $(x, \varphi(x))$.

Capitolul 3

Diferenţiabilitatea funcţiilor de mai multe variabile

3.7 Funcţii definite implicit

3.7.4 Exemplu (foliul lui Descartes). Să considerăm funcţia definită implicit prin ecuaţia $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Ecuaţia dată este simetrică în (x,y) ceea ce înseamnă că $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = 0\} = \{(y,x) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = 0\}$. Rezultă că mulţimea $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = 0\}$ este simetrică faţă de prima bisectoare. Punctele în care prima bisectoare întâlneşte mulţimea de mai sus sunt $(0,0)$ şi $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Vom figura porţiunea din mulţime plasată deasupra bisectoarei întâi $(y \geq x)$. Utilizând şirul lui Rolle putem arăta că, oricare ar fi $x \in (-\infty, \frac{3}{2}]$, există un unic $y \geq x$ aşa fel încât $F(x,y) = 0$.
$F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ şi $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3x$. Dacă rezolvăm sistemul $\begin{cases} y^2 - x = 0 \\ x^3 + y^3 - 3xy = 0 \end{cases}$ obţinem punctele în care nu putem aplica teorema funcţiilor implicite: $(0,0)$, $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$. Pentru orice alt punct $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ se obţin intervalele I şi J şi funcţia $\varphi : I \to J$ derivabilă cu derivata $\varphi'(x) = \dfrac{x^2 - y}{x - y^2}, \forall x \in I$. Punctele critice se obţin rezolvînd sistemul $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x^3 + y^3 - 3xy = 0 \end{cases}$ care ne conduce la soluţia $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$; dacă observăm că $\varphi''(\sqrt[3]{2}) < 0$, rezultă că punctul critic de mai sus este un punct de maxim local.

Notând $y = tx$ în $F(x,y) = 0$, obţinem ecuaţiile parametrice ale foliului

lui Descartes: $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{t^3+1} \\ y = \dfrac{3t^2}{t^3+1} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Tabelul de variaţie al lui x ca funcţie de t este următorul:

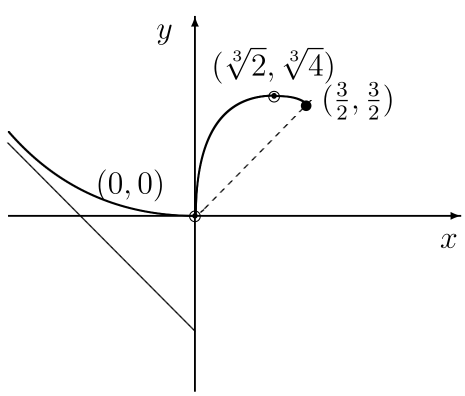
t	$-\infty$		-1			0
$x'(t)$		$+$	|		$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$		$\nearrow$	0

Se observă că $x \to -\infty \Leftrightarrow t \to -1, t > -1$; atunci putem să calculăm panta şi ordonata la origine a asimptotei oblice la graficul lui φ : $m = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{t\to-1} t = -1$ şi $n = \lim_{x\to-\infty}(y - mx) = \lim_{t\to-1} \dfrac{3(t^2+t)}{t^3+1} = -1$. Rezultă că graficul funcţiei admite ca asimptotă dreapta de ecuaţie $x + y + 1 = 0$.

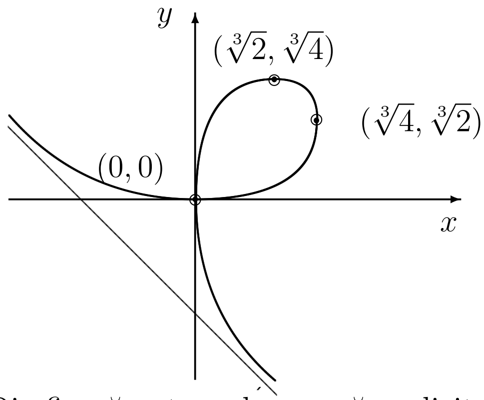
Tabelul de variaţie al singurei soluţii $y = \varphi(x) \geq x$ a ecuaţiei $F(x, y) = 0$ va fi:

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{2}$		$\frac{3}{2}$
$\varphi'(x)$		$-$	0 | $+\infty$	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$

Graficul funcţiei implicite φ arată ca în figura de mai jos:



Dacă simetrizăm acum graficul de mai sus faţă de prima bisectoare obţinem graficul foliului lui Descartes.



Din figură putem observa că explicitarea este imposibilă în punctele $(0, 0)$ şi $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$.

În cele ce urmează vom prezenta o aplicaţie a teoremei 3.7.2.

Aplicaţie. Fie un interval $K \subseteq \mathbb{R}$ şi fie $f : K \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(K)$ şi $y_0 \in \mathring{K}$ a.î. $f'(y_0) \neq 0$. Definim atunci $F : \mathbb{R} \times K \to \mathbb{R}, F(x, y) = x - f(y)$. Fie $x_0 = f(y_0)$; atunci sînt îndeplinite condiţiile din teorema 3.7.2 şi deci există intervalele $I, J \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{I}, y_0 \in \mathring{J}, I \times J \subseteq \mathbb{R} \times K$ şi o funcţie $\varphi : I \to J$ derivabilă a.î. $\{(x, y) \in I \times J : x = f(y)\} = \{(x, \varphi(x)) : x \in I\}$ şi $\varphi'(x) = \dfrac{1}{f'(\varphi(x))}$. Putem constata uşor că $(f \circ \varphi)(x) = x, \forall x \in I$ şi că $(\varphi \circ f)(y) = y, \forall y \in \varphi(I)$. Rezultă că φ este inversă a funcţiei f local pe o vecinătate a lui y_0 şi obţinem formula de derivare a inversei unei funcţii de o variabilă.

Încheiem acest paragraf cu două teoreme care extind rezultatul din 3.7.2 la cazul funcţiilor scalare de mai multe variabile şi respectiv la cazul funcţiilor vectoriale de mai multe variabile.

3.7.5 Teoremă. *Fie* $F : D \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *şi* $x^0 = (x_1^0, ..., x_k^0), y^0 \in \mathbb{R}, (x^0, y^0) \in D$ *a.î. să fie verificate următoarele condiţii:*

1). $F(x^0, y^0) = 0$,

2). $F \in C^1(D)$,

3). $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0) \neq 0$.

Atunci există două mulţimi deschise $I \subseteq \mathbb{R}^k, J \subseteq \mathbb{R}$ *cu* $(x^0, y^0) \in I \times J \subseteq D$ *şi există o funcţie* $\varphi : I \to J$ *cu proprietăţile:*

a). $\{(x, y) \in I \times J : F(x, y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)) : x \in I\}$, *b). φ este de clasă C^1 pe I şi, $\forall x = (x_1, ..., x_k) \in I, \forall i = 1, ..., n,$*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x, \varphi(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}.$$

3.7.6 Teoremă. *Fie $F : D \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l, F = (F_1, ..., F_l)$ şi $x^0 = (x_1^0, ..., x_k^0) \in \mathbb{R}^k, y^0 = (y_1^0, ..., y_l^0) \in \mathbb{R}^l, (x^0, y^0) \in D$, aşa fel încât să fie verificate următoarele condiţii:*

1). $F(x^0, y^0) = 0,$

2). $F \in C^1(D),$

3). $\dfrac{D(F_1, ..., F_l)}{D(y_1, ..., y_l)}(x^0, y^0) \neq 0.$

Atunci există două mulţimi deschise $I \subseteq \mathbb{R}^k, J \subseteq \mathbb{R}^l$ cu $(x^0, y^0) \in I \times J \subseteq D$ şi există o funcţie

$\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_l) : I \to J$ cu proprietăţile:

a). $\{(x, y) \in I \times J : F(x, y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)) : x \in I\},$

b). φ este de clasă C^1 pe I şi, $\forall x = (x_1, ..., x_k) \in I, \forall i = 1, ..., k,$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(x) = -\dfrac{\dfrac{D(F_1, F_2, ..., F_l)}{D(x_i, y_2, ..., y_l)}(x, \varphi(x))}{\dfrac{D(F_1, ..., F_l)}{D(y_1, ..., y_l)}(x, \varphi(x))} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \varphi_l}{\partial x_i}(x) = -\dfrac{\dfrac{D(F_1, ..., F_{l-1}, F_l)}{D(y_1, ..., y_{l-1}, x_i)}(x, \varphi(x))}{\dfrac{D(F_1, ..., F_l)}{D(y_1, ..., y_l)}(x, \varphi(x))} \end{cases}$$

Demonstraţie. Vom schiţa demonstraţia teoremei; demonstraţia este asemănătoare demonstraţiei II a teoremei 3.7.2; ea se bazează pe teorema de inversare locală (teorema 3.6.7).

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l, f(x, y) = (x, F(x, y))$, oricare ar fi $(x, y) = (x_1, \cdots, x_k, y_1, \cdots, y_l) \in D$; evident $f \in C^1(D)$, $f(x, y) =$

$$= (x_1, \cdots, x_k, F_1(x_1, \cdots, x_k, y_1, \cdots, y_l), \cdots, F_l(x_1, \cdots, x_k, y_1, \cdots, y_l))$$

şi deci

$$J_f(x,y)=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_k} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_l}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial F_l}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_l}{\partial x_k} & \dfrac{\partial F_l}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_l}{\partial y_l} \end{pmatrix}_{(k+l)\times(k+l)}$$

Rezultă că $\det J_f(x,y)=\dfrac{D(F_1,\cdots,F_l)}{D(y_1,\cdots,y_l)}(x,y)$. Din ipoteză $\det J_f(x^0,y^0)\neq 0$ şi deci $df(x^0,y^0):\mathbb{R}^{k+l}\to\mathbb{R}^{k+l}$ este o bijecţie.

Teorema de inversare locală ne asigură că există un deschis $U\subseteq\mathbb{R}^{k+l}$ astfel încât $(x^0,y^0)\in U\subseteq D$, $V=f(U)$ este deschis în $\mathbb{R}^{k+l}$ şi f este difeomorfism între U şi V; putem presupune fără a restrânge generalitatea că $U=I'\times J$, unde $I'\subseteq\mathbb{R}^k$, $J\subseteq\mathbb{R}^l$ sunt mulţimi deschise.

Deoarece $f(x^0,y^0)=(x^0,0)\in V$, există mulţimile deschise $I_1\subseteq I\subseteq\mathbb{R}^k$ şi $J_1\subseteq\mathbb{R}^l$ astfel încât $(x^0,0)\in I_1\times J_1\subseteq V$ de unde $(x^0,y^0)\in f^{-1}(I_1\times J_1)\subseteq U$.

Funcţia f fiind continuă, $f^{-1}(I_1\times J_1)$ este mulţime deschisă şi deci există doi deschişi $I\subseteq I_1\subseteq\mathbb{R}^k$, $J'\subseteq\mathbb{R}^l$ astfel încât

$$(x^0,y^0)\in I\times J'\subseteq f^{-1}(I_1\times J_1)\subseteq U=I'\times J;$$

deci $(x^0,y^0)\in I\times J\subseteq I_1\times J\subseteq I'\times J=D$.

Fie $p_l:\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^l, p_l(x,y)=y,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^l$ (proiecţia pe $\mathbb{R}^l$); p_l este operator liniar şi deci este diferenţiabil.

Definim $\varphi:I\to\mathbb{R}^l$ prin $\varphi(x)=p_l(f^{-1}(x,0)),\forall x\in I$.

Oricare ar fi $x\in I$, $(x,0)\in I\times J_1\subseteq I_1\times J_1\subseteq V$ şi deci $f^{-1}(x,0)\in U=I'\times J$; astfel $\varphi(x)=p_l(f^{-1}(x,0))\in J$ şi deci $\varphi:I\to J$.

În plus, dacă $y=\varphi(x)$, atunci $(x,y)=f^{-1}(x,0)$, de unde $F(x,y)=0$. Rezultă imediat că $\{(x,y)\in I\times J: F(x,y)=0\}=\{(x,\varphi(x)):x\in I\}$.

φ este compunere de trei funcţii diferenţiabile ($\varphi=p_l\circ f^{-1}\circ g$, unde $g: I\to I\times J_1, g(x)=(x,0)$) şi deci φ este diferenţiabilă. Dacă $\varphi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_l)$ atunci, oricare ar fi $x\in I$,

$$\begin{cases} F_1(x_1,\cdots,x_k,\varphi_1(x_1,\cdots,x_k),\cdots,\varphi_l(x_1,\cdots,x_k))=0\\ \cdots\cdots\cdots\\ F_l(x_1,\cdots,x_k,\varphi_1(x_1,\cdots,x_k),\cdots,\varphi_l(x_1,\cdots,x_k))=0\end{cases}$$

Fie $i \in \{1, \cdots, k\}$; derivând în relaţiile de mai sus după x_i obţinem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \cdots \dfrac{\partial F_1}{\partial y_l} \cdot \dfrac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial F_l}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_l}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \cdots + \dfrac{\partial F_l}{\partial y_l} \cdot \dfrac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \quad \text{sau}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_l}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \cdots + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_l} \cdot \dfrac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} = -\dfrac{\partial F_1}{\partial x_i} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial F_l}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \cdots + \dfrac{\partial F_l}{\partial y_l} \cdot \dfrac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} = -\dfrac{\partial F_l}{\partial x_i} \end{cases}$$

Acesta este un sistem liniar de l ecuaţii cu l necunoscute: $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}, \cdots, \dfrac{\partial \varphi_l}{\partial x_i}$. Determinantul sitemului este

$$\frac{D(F_1, \cdots, F_l)}{D(y_1, \cdots, y_l)}(x, \varphi(x)) = \det\left(J_f(x, \varphi(x))\right).$$

Să remarcăm că $f : U \to V$ este difeomorfism şi deci, oricare ar fi $(x, \varphi(x)) \in I \times J \subseteq I' \times J = U, df(x, \varphi(x)) : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^{k+l}$ este o bijecţie (vezi teorema 3.6.5) ceea ce antrenează că $J_f(x, \varphi(x))$ este nesingulară.

Rezultă că sistemul de mai sus este compatibil şi determinat iar soluţia sa este dată de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(x) = -\dfrac{\dfrac{D(F_1, F_2, ..., F_l)}{D(x_i, y_2, ..., y_l)}(x, \varphi(x))}{\dfrac{D(F_1, ..., F_l)}{D(y_1, ..., y_l)}(x, \varphi(x))} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \varphi_l}{\partial x_i}(x) = -\dfrac{\dfrac{D(F_1, ..., F_{l-1}, F_l)}{D(y_1, ..., y_{l-1}, x_i)}(x, \varphi(x))}{\dfrac{D(F_1, ..., F_l)}{D(y_1, ..., y_l)}(x, \varphi(x))} \end{cases} . \qquad \blacksquare$$

Capitolul 3

Diferenţiabilitatea funcţiilor de mai multe variabile

3.8 Extreme condiţionate

3.8.1 Definiţie. *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, l < k$, $g_1, ..., g_l : A \to \mathbb{R}$; considerăm mulţimea $F = \{x \in A : g_1(x) = 0, ..., g_l(x) = 0\} \subseteq A$.*

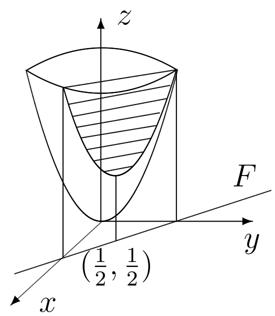
Un punct $a \in F$ se numeşte **punct de minim local condiţionat** *pentru f în raport cu legăturile date de funcţiile $g_1, ..., g_l$ dacă există o vecinătate a sa $V \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $f(x) \geq f(a), \forall x \in F \cap V$.*

Un punct $a \in F$ se numeşte **punct de maxim local condiţionat** *pentru f în raport cu legăturile date de funcţiile $g_1, ..., g_l$ dacă există o vecinătate a sa $V \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $f(x) \leq f(a), \forall x \in F \cap V$.*

Punctele de minim local condiţionat sau de maxim local condiţionat se numesc **puncte de extrem local condiţionat** *sau* **puncte de extrem local cu legături** *(condiţiile sau legăturile fiind date de relaţiile $g_i(x) = 0, i = 1, ..., l$). Dacă nu este pericol de confuzie, vom mai spune prescurtat că un astfel de punct este un punct de extrem condiţionat pentru f.*

3.8.2 Observaţii. 1). Punctele de extrem local condiţionat pentru f sînt puncte de extrem obişnuite pentru restricţia funcţiei f la mulţimea F, $f|_F$. Cu toate acestea nu putem aplica teoria dezvoltată mai sus pentru a găsi aceste puncte. Reamintim că am căutat punctele de extrem ale unei funcţii printre punctele critice interioare mulţimii de definiţie a funcţiei. Este însă posibil ca mulţimea F să nu aibă nici-un punct interior.

De exemplu, fie $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 + y^2, g(x,y) = x + y - 1, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Atunci $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y - 1 = 0\} = \{(x, 1-x) : x \in \mathbb{R}\}$ reprezintă o dreaptă în $\mathbb{R}^2$ şi deci F nu are puncte interioare.



$f|_F(x, 1-x) = 2x^2 - 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, şi deci are un punct de minim local în punctul $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in F$; rezultă că punctul $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ este un punct de minim local condiţionat pentru funcţia f. Remarcăm că funcţia f are un minim absolut pe $\mathbb{R}^2$ în $(0,0)$.

2). Aşa cum am observat în exemplul de mai sus, dacă sistemul

$$(C) \qquad \begin{cases} g_1(x_1, ..., x_k) = 0 \\ \cdots \\ g_l(x_1, ..., x_k) = 0 \end{cases}$$

s-ar putea rezolva şi deci am determina l dintre numerele $x_1, ..., x_k$ funcţie de celelalte $k - l$ atunci, înlocuindu-le, funcţia f ar rămîne funcţie de $k - l$ variabile independente (fără legături) şi punctele de extrem s-ar putea determina prin metoda expusă în secţiunea precedentă. În general acest lucru nu se poate face explicit însă, dacă $g = (g_1, ..., g_l) : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ este o funcţie de clasă C^1 pe A şi rangul matricii jacobiene J_g într-un punct $a \in \mathring{A}$ este egal cu l - numărul condiţiilor impuse - atunci sistemul de mai sus admite local (pe o vecinătate a punctului a) o soluţie; deci l dintre variabilele $x_1, ..., x_k$ sînt funcţii (chiar funcţii diferenţiabile !) de celelalte $k-l$. În cele ce urmează vom presupune că aceste condiţii sînt îndeplinite şi ne propunem să găsim metode specifice de obţinere a punctelor de extrem condiţionat pentru f.

Următoarea teoremă prezintă o condiţie necesară pentru ca un punct să fie punct de extrem local condiţionat.

3.8.3 Teoremă. *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă, fie $l < k$ şi funcţiile $f, g_1, ..., g_l : D \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 pe D; fie $F = \{x \in D : g_1(x) = 0, ..., g_l(x) =$*

$0\}$ *şi* $a \in F$ *un punct de extrem local condiţionat pentru* f. *Atunci există* l *numere reale* $\lambda_1, ..., \lambda_l$ *a.î.*

$$\nabla f(a) = \lambda_1 \cdot \nabla g_1(a) + ... + \lambda_l \cdot \nabla g_l(a).$$

Demonstraţie. Vom schiţa demonstraţia teoremei în cazul $l = 1$. Presupunem deci că $f, g : D \to \mathbb{R}, f, g \in C^1(D), F = \{x \in D : g(x) = 0\}$ şi $a \in F$ un punct de minim local pentru f condiţionat de g; există atunci o vecinătate $V \subseteq D$ a sa a.î. $f(x) \geq f(a), \forall x \in V \cap F$.

Din observaţia precedentă vom presupune că $\text{rang}(J_g(a)) = 1$. Deoarece $J_g(a) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(a) \cdots \frac{\partial g}{\partial x_k}(a)\right)_{1\times k}$ aceasta antrenează că una dintre derivatele parţiale din matricea jacobiană este nenulă. Vom presupune că $\frac{\partial g}{\partial x_k}(a) \neq 0$. Putem atunci aplica atunci teorema 3.7.5 (varianta scalară a funcţiei de mai multe variabile definită implicit). Există deci deschişii $I \subseteq \mathbb{R}^{k-1}, J \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $(\bar{a}, a_k) = ((a_1, \cdots, a_{k-1}), a_k) \in I \times J \subseteq V \subseteq D$ şi există funcţia $\varphi : I \to J$ cu proprietăţile:

a). $\{(\bar{x}, x_k) = (x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k) \in I \times J : g(x_1, \cdots, x_k) = 0\} =$
$= \{(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) : \bar{x} = (x_1, \cdots x_{k-1}) \in I\}$ şi

b). $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\bar{x}) = -\dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{x}, \varphi(\bar{x}))}{\dfrac{\partial g}{\partial x_k}(\bar{x}, \varphi(\bar{x}))}, \forall \bar{x} \in I, \forall i = 1, \cdots, k-1.$

Oricare ar fi $\bar{x} \in I, (\bar{x}, \varphi(\bar{x})) \in I \times J \subseteq V \subseteq D$ şi $g(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = 0$ deci $(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) \in V \cap F$ de unde $f(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) \geq f(a)$. Rezultă că funcţia $h : I \to \mathbb{R}$ definită prin $h(\bar{x}) = f(\bar{x}, \varphi(\bar{x})), \forall \bar{x} = (x_1, \cdots, x_{k-1}) \in I$ are un minim local în punctul $\bar{a} = (a_1, \cdots, a_{k-1}) \in I$; deoarece h este diferenţiabilă în $\bar{a}$ rezultă din teorema lui Fermat (teorema 3.5.2) că $\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x_1}(\bar{a}) &= 0 \\ \cdots & \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_{k-1}}(\bar{a}) &= 0 \end{cases}$, de unde

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\bar{a}) &= 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\bar{a}) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_{k-1}}(a) + \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_{k-1}}(\bar{a}) &= 0 \end{cases}.$$

În relaţiile de mai sus înlocuim derivatele parţiale ale lui φ şi obţinem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)}{\dfrac{\partial g}{\partial x_k}(a)} \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(a) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_{k-1}}(a) = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)}{\dfrac{\partial g}{\partial x_k}(a)} \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x_{k-1}}(a) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)}{\dfrac{\partial g}{\partial x_k}(a)} \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x_k}(a) \end{cases}$$

Notăm $\lambda = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)}{\dfrac{\partial g}{\partial x_k}(a)}$ şi aunci $\nabla f(a) = \lambda \cdot \nabla g(a)$. ■

3.8.4 Definiţie. *Numerele $\lambda_1, ..., \lambda_l$ se numesc* **multiplicatori Lagrange** *asociaţi funcţiei f şi legăturilor $g_1, ..., g_l$ în punctul critic condiţionat a.*

3.8.5 Observaţie. În teorema precedentă

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \quad \ldots \quad, \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right)$$

este gradientul lui f în a (vezi observaţia 3.2.7, 1)) şi $\nabla g_1(a), ..., \nabla g_l(a)$ sînt gradienţii funcţiilor $g_1, ..., g_l$ în a.

3.8.6 Definiţie. *Considerăm sistemul de $k + l$ ecuaţii:*

$$(EC) \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, ..., x_k) & = \lambda_1 \cdot \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, ..., x_k) + ... + \lambda_l \cdot \dfrac{\partial g_l}{\partial x_1}(x_1, ..., x_k) \\ \qquad \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, ..., x_k) & = \lambda_1 \cdot \dfrac{\partial g_1}{\partial x_k}(x_1, ..., x_k) + ... + \lambda_l \cdot \dfrac{\partial g_l}{\partial x_k}(x_1, ..., x_k) \\ \\ g_1(x_1, ..., x_k) & = 0 \\ \qquad \ldots & \ldots \\ g_l(x_1, ..., x_k) & = 0 \end{cases}$$

cu $k+l$ necunoscute.

Dacă sistemul are o soluţie, $(a_1, ..., a_k, \lambda_1, ..., \lambda_l)$ atunci spunem că punctul $a = (a_1, ..., a_l)$ este un **punct critic condiţionat** *pentru funcţia f în raport cu legăturile date de funcţiile $g_1, ..., g_l$ iar $\lambda_1, ..., \lambda_l$ sînt multiplicatorii Lagrange asociaţi funcţiei f şi legăturilor $g_1, ..., g_l$ în acest punct.*

3.8.7 Observaţie.
Ţinînd cont de definiţia precedentă putem reformula teorema 3.8.3:
Punctele de extrem condiţionat ale funcţiei f în raport cu legăturile date de funcţiile $g_1, ..., g_l$ se găsesc printre punctele critice condiţionate ale funcţiei.

Se observă că o soluţie a sistemului din definiţia precedentă ne pune la dispoziţie atît punctele critice condiţionate (potenţiale puncte de extrem condiţionat) cît şi multiplicatorii Lagrange asociaţi.

3.8.8 Definiţie. *Fie $\lambda_1, ..., \lambda_l$ multiplicatorii Lagrange asociaţi funcţiei $f : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ şi legăturilor $g_1, ..., g_l : D \to \mathbb{R}$ în punctul critic $a = (a_1, ..., a_k) \in F = \{x \in D : g_1(x) = ... = g_l(x) = 0\}$; funcţia $L : D \to \mathbb{R}$, definită prin $L(x) = f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \ldots - \lambda_l g_l(x), \forall x \in D$, se numeşte* **funcţia lui Lagrange**.

3.8.9 Observaţii. 1). Deoarece $(a_1, ..., a_k, \lambda_1, ..., \lambda_l)$ este o soluţie a sistemului din definiţia 3.8.6, remarcăm că a este un punct critic al funcţiei L şi că $L(a) = f(a)$.

2). Dacă a este un punct de minim local pentru L atunci există o vecinătate a sa V aşa fel încît, $\forall x \in V \cap A, L(x) \geq L(a) = f(a)$; rezultă că, $\forall x \in V \cap F, f(x) = L(x) \geq L(a) = f(a)$, ceea ce arată că un asemenea punct este punct de minim local condiţionat pentru f. La fel se arată că dacă a este punct de maxim local pentru L atunci el este punct de maxim local condiţionat pentru f.

Rezultă că este suficient să studiem comportamentul lui L în punctul critic a; acest studiu se va face, conform teoremei 3.5.10, analizînd comportarea formei pătratice de k variabile dată de diferenţiala a doua a funcţiei lui Lagrange în a, $d^2L(a) = \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a) dx_i dx_j$.

Cele spuse mai sus argumentează următoarea teoremă:

3.8.10 Teoremă. *Fie a un punct critic condiţionat al funcţiei f în raport cu legăturile date de funcţiile $g_1, ..., g_l$ şi L funcţia lui Lagrange.*

• *Dacă* $d^2L(a)$ *este pozitiv definită* a *este un punct de minim local condiţionat pentru* f.
• *Dacă* $d^2L(a)$ *este negativ definită* a *este un punct de maxim local condiţionat pentru* f.

3.8.11 Observaţie. Este posibil ca $d^2L(a)$ să nu fie pozitiv sau negativ definită şi totuşi să putem decide asupra punctelor critice condiţionate. Astfel, deoarece $(x_1, ..., x_k)$ este o soluţie a sistemului (C) (observaţia 3.8.2, 2)), $dx_i, i = 1, ..., k$ nu sînt independente. Dacă diferenţiem condiţiile (C) în punctul a obţinem sistemul

$$\begin{array}{c} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a)dx_1 + ... + \frac{\partial g_1}{\partial x_k}(a)dx_k = 0 \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(a)dx_1 + ... + \frac{\partial g_2}{\partial x_k}(a)dx_k = 0 \\ \cdots \\ \frac{\partial g_l}{\partial x_1}(a)dx_1 + ... + \frac{\partial g_l}{\partial x_k}(a)dx_k = 0 \end{array}$$

Aşa cum am remarcat în 3.8.2, 2), presupunem tacit că rangul matricii jacobiene $J_{(g_1,...,g_l)}(a)$ este l; atunci sistemul de mai sus permite să determinăm liniar l dintre $dx_1, ..., dx_k$ în funcţie de celelalte $k - l$ diferenţiale şi astfel $d^2L(a)$ este o forma pătratică depinzînd de $k - l$ variabile; după cum aceasta este pozitiv definită, negativ definită sau nedefinită, a este un punct de minim condiţionat, de maxim condiţionat sau nu este punct de extrem condiţionat.

3.8.12 Exemplu. Să se determine distanţa de la punctul $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ la dreapta $(d)\ \ ax + by + c = 0$.

Considerăm funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x, y) = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2$; să determinăm punctul de minim condiţionat de $g(x, y) = ax + by + c = 0$. Sistemul (EC) care determină punctele critice condiţionate devine în acest caz:

$$\begin{cases} 2(x - x_0) = \lambda a \\ 2(y - y_0) = \lambda b \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

de unde $\begin{cases} x_1 = x_0 + \frac{\lambda a}{2} \\ y_1 = y_0 + \frac{\lambda b}{2} \end{cases}$ şi, înlocuind în ecuaţia dreptei, obţinem multiplicatorul $\lambda = \frac{-2(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}$ şi punctul critic condiţionat (x_1, y_1).

Funcţia lui Lagrange este $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, L(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \lambda(ax + by + c)$ şi deci $d^2L(x_1, y_1) = 2(dx)^2 + 2(dy)^2$ este pozitiv definită. Rezultă că (x_1, y_1) este punct de minim condiţionat pentru f.

Valoarea minimului este $f(x_1, y_1) = (x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2 = \dfrac{\lambda^2(a^2 + b^2)}{4} = \dfrac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}$.

Distanţa de la (x_0, y_0) la dreapta (d) se va obţine extrăgînd radical din valoarea minimă a lui f; se obţine valoarea cunoscută $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.